510
C41YvG

P. L. TSCHEBYSCHEF.

P. L. TSCHEBYSCHEF
UND SEINE WISSENSCHAFTLICHEN LEISTUNGEN

VON

A. WASSILIEF.

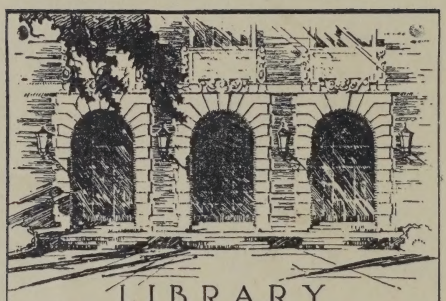
DIE TSCHEBYSCHEFSCHEN ARBEITEN
IN DER THEORIE DER GELENKMECHANISMEN

VON

N. DELAUNAY.

MIT EINEM BILDNIS TSCHEBYSCHEFS IN HELIOGRAVÜRE.

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.



LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF ILLINOIS

510.4
C41YvG

The person charging this material is responsible for its return to the library from which it was withdrawn on or before the **Latest Date** stamped below.

Theft, mutilation, and underlining of books are reasons for disciplinary action and may result in dismissal from the University.

To renew call Telephone Center, 333-8400

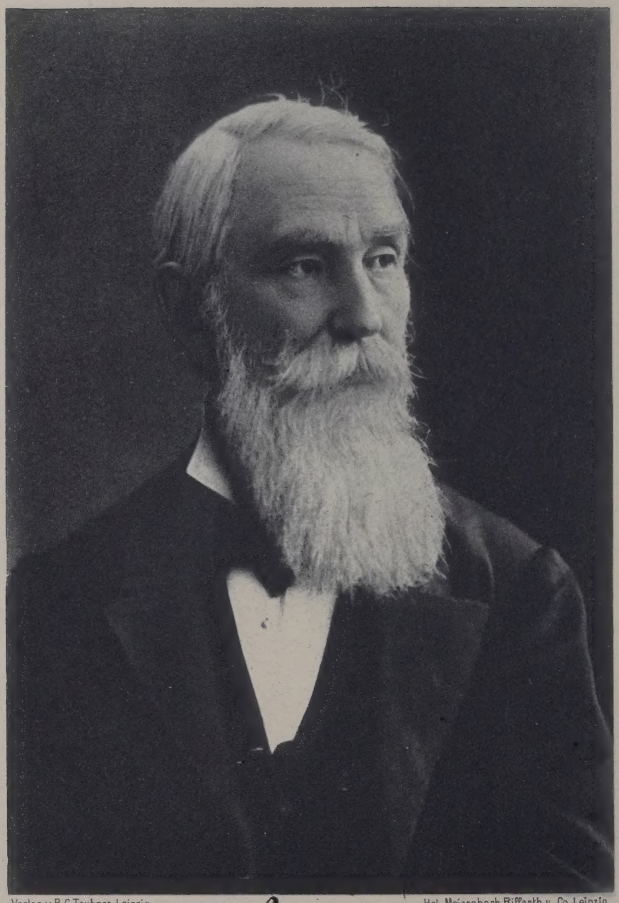
UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY AT URBANA-CHAMPAIGN

OCT 23 1980

SEP 29 REC'D

L161—O-1096

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS



Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig. Hel. Meisenbach Riffarth u. Co., Leipzig.

LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS
URBANA

P. L. TSCHEBYSCHEF.

P. L. TSCHEBYSCHEF
UND SEINE WISSENSCHAFTLICHEN LEISTUNGEN

VON

A. WASSILIEF.

DIE TSCHEBYSCHEFSCHEN ARBEITEN
IN DER THEORIE DER GELENKMECHANISMEN

VON

N. DELAUNAY.

Mit einem Bildnis Tschebyschefs in Heliogravüre.

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1900.

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

510.
C41YvG

Inhalt.

Seite

P. L. Tschebyschef und seine wissenschaftlichen Leistungen. Von A. Wassilief:

I. Lebensbeschreibung. Erste Untersuchungen (Zahlentheorie) 3
II. Näherungswerte einer Funktion. Aufgaben über Minima besonderer Art. Funktionen, die sich möglichst wenig von Null entfernen. Konstruktion geographischer Karten 9
III. Integration der irrationalen Differentiale 15
IV. Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate. Reihenentwickelung fortschreitend nach den Nennern der Näherungsbrüche. Grenzwerte der Integrale in dem Fall, wo die integrierte Funktion in zwei Faktoren zerlegbar ist 17
V. Neue Art von Problemen der Variationsrechnung. Entwickelung in nach den Funktionen R_n fortschreitende Reihen. Successive Minima des Ausdrucks $x - ay - b$ 25
VI. Grenzwerte der Integrale und Summen 29
VII. Theorie der Wahrscheinlichkeiten 37
VIII. Reihe von Lagrange. Angewandte Mechanik. Geometrie der Oberflächen (Deformation der ebenen Netze). Tschebyschefs Mechanismen 41
IX. Allgemeine Betrachtungen über Tschebyschefs wissenschaftliche Leistungen 46
Verzeichnis der Arbeiten von Tschebyschef 50

Die Tschebyschefschen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen. Von N. Delaunay 57

16 '14 Z.T.

279691

P. L. TSCHEBYSCHEF

UND SEINE WISSENSCHAFTLICHEN LEISTUNGEN

VON

A. WASSILIEF.

I.

Lebensbeschreibung. Erste Untersuchungen (Zahlentheorie).

Pafnutij Lwowitsch Tschebyschef wurde am 14./26. Mai 1821 als Sohn adeliger Eltern im Regierungsbezirke Kaluga, Distrikt Borowsk, geboren. Wie viele lebhafte und talentvolle Kinder, empfand er ein grosses Vergnügen daran, mechanisches Spielzeug sich herzustellen, wie kleine Mühlen u. s. w. Ich habe ihn erzählen hören, dass er seit seinen ersten Unterrichtsstunden in der Geometrie den engen Zusammenhang zwischen seinem Lieblingsspielzeug und diesem neuen Studiengegenstande erkannte. „Ich muss diese Dinge gut lernen", sagte sich das Kind, und begann mit Eifer Geometrie zu treiben. So traten schon in der Kindheit die Neigungen und die Geistesrichtung des Geometers zu Tage, der während seines ganzen Lebens die zu den Anwendungen auf die Mechanik geeignetsten mathematischen Methoden aufsuchte.

Durch eine Erziehung, welche der Entwickelung seiner natürlichen Neigungen freien Lauf liess, im Vaterhause wunderbar vorbereitet, bezog Tschebyschef im Jahre 1837 die physikalisch-mathematische Fakultät in Moskau. Diese Universität zeichnete sich damals durch grosse Berühmtheit aus; die mathematischen Vorlesungen wurden durch vorzügliche Professoren, unter anderen Zernof und Braschman gehalten.

Im Jahre 1841 verliess Tschebyschef die Universität mit dem Diplom eines Kandidaten, nachdem er eine goldene Medaille erhalten hatte für eine Arbeit, betitelt: „Über die numerische Auflösung algebraischer Gleichungen höheren Grades". Nach Schluss seiner Universitätsstudien erwarb er sich im Jahre 1843 den Ruf eines Gelehrten durch die Veröffentlichung zweier Aufsätze in den ersten der damaligen mathematischen Zeitschriften. Der erste Aufsatz führt den Titel: „Note sur une classe d'intégrales définies multiples". Er erschien in

dem Journal von Liouville [1]* und zog die Aufmerksamkeit Catalan's auf sich. Der zweite erschien im folgenden Jahre in der Zeitschrift von Crelle [2] und handelt von der Konvergenz der Taylor'schen Reihe. Diese beiden Gegenstände hatten in der Folge nur ein untergeordnetes Interesse für Tschebyschef. In diese Zeit fällt die erste Beschäftigung des jungen Gelehrten mit der Theorie der Wahrscheinlichkeiten, welche er später mit so wichtigen Resultaten bereichern sollte. Der Zweck seines „Versuchs einer elementaren Analyse der Theorie der Wahrscheinlichkeiten" (1845) [3] besteht, wie er in der Vorrede sagt, darin, „ohne Hilfe der transcendenten Analysis die Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu beweisen und ebenso daraus die Hauptanwendungen abzuleiten, auf welchen alle auf Beobachtung und Erfahrung begründeten Kenntnisse beruhen".

Dieser Versuch trug Tschebyschef den Grad eines Magisters ein und er wurde 1847 durch die Universität von St. Petersburg eingeladen, höhere Algebra und Zahlentheorie zu dozieren. Einige Zeit vor seiner Ankunft in Petersburg hatte die Kaiserliche Akademie der Wissenschaften die Veröffentlichung einer vollständigen Ausgabe der Abhandlungen Euler's unternommen (Opera minora collecta). Der Akademiker Fuss schrieb in seinem Bericht hierüber, datiert vom 6. April 1841: „Hoc monumentum, quod etiam ad veram Russiae in litteris gloriam promovendam valebit, est editio completa omnium oterum viri illius, quem Academia Petropolitana inde a prima origine quinquaginta amplius annos suum fuisse gloriatur". Der junge Tschebyschef wurde als Mitarbeiter zu diesem grossartigen Werke berufen und seit 1849 liessen Buniakowsky und er die zwei grossen Bände erscheinen, welche unter dem Titel „Leonhardi Euleri commentationes arithmeticae collectae" die 99 zahlentheoretischen Abhandlungen Euler's enthalten. Diese Abhandlungen (darunter ein ausgedehnter „Tractatus de numerorum doctrina" und noch einige andere, welche damals zum ersten Male erschienen) sind in chronologischer Reihenfolge geordnet; es geht jedoch ein „systematisch und rationell geordnetes Inhaltsverzeichnis", das bewunderungswürdig abgefasst ist, dieser Sammlung voraus. Wenn der Gedanke einer neuen Ausgabe

---

* Diese Zahl in eckiger Klammer, wie die folgenden, bezieht sich auf das Verzeichnis der Werke und Abhandlungen Tschebyschef's am Schlusse vorliegender Schrift.

Euler's, der in den letzten Jahren sich Bahn brach und einem dringenden wissenschaftlichen Bedürfnis entspricht, dank dem Wetteifer aller civilisierten Völker sich verwirklichen sollte, so braucht man nur die vorzügliche Ausgabe der arithmetischen Werke zum Muster zu nehmen, an welcher Tschebyschef sich als Mitarbeiter beteiligte.

Die Herausgabe der Euler'schen Abhandlungen gab dem jungen Mathematiker Anlass dazu, sich mit Zahlentheorie zu beschäftigen und er nahm, gleichsam um seine Kräfte zu versuchen, sofort das schwierigste Problem der Zahlentheorie in Angriff, nämlich die Aufsuchung des Gesetzes, nach welchem die Primzahlen in der Reihe der natürlichen Zahlen verteilt sind. Dieser Frage widmete er zwei bemerkenswerte Abhandlungen.

In der ersten dieser Abhandlungen [5] beweist er durch eine äusserst elegante Untersuchung, dass die Funktion $\varphi(x)$, welche die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze bestimmt, den beiden folgenden Ungleichungen zwischen den Grenzen $x = 2$ und $x = \infty$ unendlich vielmal genügt:

$$\varphi(x) > \int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x}$$

und

$$\varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x},$$

wie klein auch der positiv angenommene Wert von α sei, und wie gross auch zu gleicher Zeit die Zahl n sei. Daraus folgt, dass der Ausdruck

$$\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$$

für $x = \infty$, eine von 1 verschiedene Grenze nicht haben kann, was sich nicht mit der Annäherungsformel für die Funktion $\varphi(x)$ vereinbaren lässt, die durch Legendre gegeben wurde:

$$\left(\varphi(x) = \frac{x}{\log x - 1{,}08366}\right).$$

Ebenso folgt, dass man als Näherungswert der Funktion $\varphi(x)$ das Integral $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$* betrachten kann.

In der zweiten Abhandlung [8] giebt Tschebyschef eine Funktionalgleichung, der durch $\Theta(z)$ genügt wird, durch die Funktion, welche die Summe der Neper'schen Logarithmen aller, den Wert z nicht über-

* Gauss fand 1792 empirisch diesen gleichen Näherungswert von $\varphi(x)$.

schreitenden Primzahlen bezeichnet. Diese zu gleicher Zeit von dem Prinzen A. von Polignac aufgefundene und später durch Tschebyschef verallgemeinerte [54] Gleichung* giebt zwei Grenzen für die Funktion $\Theta(z)$, was Tschebyschef gestattete, in aller Strenge das berühmte Postulat von M. Bertrand zu beweisen: „Zwischen der Zahl N und $2N-2$ liegt stets eine Primzahl".

Während der Zeit, die zwischen der Veröffentlichung dieser beiden Schriften verlief, liess Tschebyschef sein klassisches Werk über die Theorie der Kongruenzen erscheinen, welches für ihn an die Stelle der Doktordissertation trat. Fünfzig Jahre sind seit Veröffentlichung dieses Werkes verflossen, aber es hat an seinem hohen wissenschaftlichen und pädagogischen Wert nichts eingebüsst; die beiden in den letzten Jahren erschienenen Übersetzungen [61] (ins Deutsche und Italienische) beweisen uns dies und befreien uns auch von einer eingehenden Analyse des Werks. Wir heben nur hervor, dass dieses Buch auch bemerkenswert ist wegen seines eleganten und präzisen Stils sowohl, als durch die Eigentümlichkeit der Exposition, die sich besonders in den letzten Kapiteln kundgiebt, die über die Auflösung der Kongruenzen zweiten Grades mit zwei Unbekannten und über die Anwendung der Theorie der Kongruenzen auf die Zerlegung der Zahlen in ihre Primfaktoren handeln.

Man kann als Ergänzung dieser Untersuchungen die Abhandlung über die quadratischen Formen [9] ansehen, worin der Verfasser nachweist, dass man, um zu entscheiden, ob eine gegebene Zahl N eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl ist, sich nicht nur der quadratischen Formen mit negativen Determinanten bedienen kann, wie es Euler in seinen Untersuchungen thut, sondern auch der Formen $\pm(x^2-Dy^2)$, deren quadratische Divisoren nur von der Form $\lambda x^2-\mu y^2$ sind. Die von Tschebyschef entdeckten Sätze werden auf die Zahl 8520191 angewendet, deren Natur ein spezielles Interesse für die Zahlentheorie aufweist.** Tschebyschef beweist, dass diese Zahl eine Primzahl ist.

---

* Siehe Serret. Cours d'Algèbre supérieure, 3ième édition, tome II, p. 204.

** Legendre (théorie des nombres, tome 2, 3ième édition 1830, p. 152) fand, dass die zwei Zahlen

$$A = 2^8 \times 8520191$$

und

$$B = 2^3 \times 257 \times 33023$$

befreundete Zahlen sind, wenn die Zahl 8520191 eine Primzahl ist.

An dieser Stelle ist es auch angebracht, einige andere schöne durch Tschebyschef erhaltene Resultate im Gebiet der Zahlentheorie anzuführen.

Das Ergebnis der Untersuchung des Wertes von $f(1)$, wo $f(x)$ mit einer anderen $F(x)$ durch eine Gleichung von der Form:

$$F(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) + \cdots$$

verbunden ist, zeigt, dass

$$f(1) = A_1 . F(1) + A_2 F(2) + A_3 . F(3) + A_4 F(4) \ldots$$

Ist n eine Primzahl, so hat man $A_n = 1$; ist n das Produkt mehrerer, von der Zahl k verschiedener Primfaktoren, so hat man: $A_n = (-1)^k$; enthält endlich n zweimal denselben Primfaktor, so ist $A_n = 0$. Eine elegante Entwickelung von e^{-a} als Produkt unendlich vieler Faktoren ist eines der Resultate des angeführten Satzes. (Siehe [10] und auch Bertrand: Calcul différentiel, p. 331.) Diese Untersuchung Tschebyschef's ist eng mit der durch die Summe der Logarithmen der Primzahlen verifizierten Gleichung verbunden. Eine allgemeinere Gleichung führte Tschebyschef auf das bemerkenswerte Resultat, dass ein Unterschied in der Verteilung der Primzahlen von der Form $4n + 1$ und derjenigen von der Form $4n + 3$ in der Reihe der natürlichen Zahlen besteht, der sich z. B. durch die Thatsache kundgiebt, dass der Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \lambda e^{-(2n+1)c},$$

(wo $\lambda = \pm 1$, je nachdem $c = 4n \mp 1$ ist), dem Unendlichen sich nähert, wenn c sich der Null nähert.

Bemerken wir endlich das von Herrn Hermite in seiner Vorlesung [79] erwähnte Resultat über den Wert des Bruchs $\frac{P_n}{n}$ wenn P_n die grösste in der Zahl $1 + 4n^2$ enthaltene Primzahl ist Der strenge Beweis der Eigenschaft, welche dieser Quotient besitzt, dem Unendlichen sich zu nähern, wenn n dies thut, wurde kürzlich durch Herrn Markof nach einem in den Manuskripten Tschebyschef's nach seinem Tode gefundenen Fragment geliefert.*

Seine glänzenden Abhandlungen über die Zahlentheorie brachten Tschebyschef in die erste Reihe der russischen Mathematiker und

* Comptes rendus. T. CXX, 1895. p. 1032—1034.

bezeichneten ihn der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg zur Wahl als Professor. Die Lehrstühle für reine Mathematik waren durch Fuss, Ostrogradsky und Buniakowsky besetzt; auch beeilte sich die Akademie, da sie keinen Lehrstuhl für reine Mathematik zur Verfügung hatte, ihn 1853 auf den Lehrstuhl für angewandte Mathematik zu berufen. Im Jahre 1859 zum ordentlichen Akademiker, bald nachher zum ordentlichen Professor an der Universität Petersburg ernannt, widmete Tschebyschef, dank seinem von Familiensorgen freien Cölibat, sein Leben ausschliesslich Untersuchungen und dem Unterricht. Sein Unterricht war nicht weniger bemerkenswert als seine Entdeckungen; sein immer klarer und lebhafter Geist spiegelte sich darin; man konnte seine Vorträge nicht hören, ohne durch ihr Interesse gefesselt, ohne durch ihren Enthusiasmus mit fortgerissen zu werden.* Dank seinem Lehrtalent hatte Tschebyschef zahlreiche Schüler, die mit Eifer an der Entwickelung seiner Ideen arbeiteten. Also war Tschebyschef an der Universität Petersburg von einem Glanz des Ruhmes umgeben und es war ein harter Schlag für die Universität, als er, ungeachtet der wiederholten Bitten des akademischen Senats der Universität, im Jahre 1882 sich entschloss, den Lehrstuhl zu verlassen, um sich ausschliesslich der Akademie zu widmen. Fast alle Jahre verbrachte er den Sommer im Auslande, und die französische Vereinigung zur Förderung der Wissenschaften sah ihn oft den Sitzungen ihrer Kongresse beiwohnen. Seine Reisen ins Ausland waren die Ursache vieler wissenschaftlicher Bekanntschaften, deren er sich, sogar mitten in einer Vorlesung, gern erinnerte. Eine besondere Freundschaft verband ihn mit den Herren Hermite, Bertrand, Kronecker, Catalan, später mit Herrn Ed. Lucas und Laisant. Er liebte Paris und man sah ihn dort immer voll Eifer und Liebenswürdigkeit. In St. Petersburg führte er jedoch ein sehr zurückgezogenes Leben, das er bis zu Ende seines Lebens der Mathematik widmete. Selbst am Vorabende seines Todes, der ihn am 26. November (8. Dezember) 1894 überraschte, unterhielt er sich noch über Mathematik in betreff einer einfachen Regel, die er zur sehr genauen Rektifikation einer Kurve entdeckt hatte [83].

* Von 1860 bis 1875 hielt er Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale und über die Integration der Differentialgleichungen, über die Zahlentheorie und die Wahrscheinlichkeitstheorie. Im Jahre 1875 trat er die Vorlesungen über Differentialgleichungen an einen andern Professor ab.

Die Verdienste Tschebyschef's wurden von der wissenschaftlichen Welt voll anerkannt. Im Jahre 1860 wurde er zum korrespondierenden Mitglied der Pariser Akademie erwählt und 1874 zum auswärtigen Mitglied. Er ist seit Peter dem Grossen der erste Russe gewesen, dem diese Ehre zu teil wurde. Kein russischer Gelehrter hat zeitlebens einen solchen Ruhm genossen, der nur grösser werden kann, wenn einmal die wissenschaftliche Welt die Untersuchungen und geistreichen Gedanken Tschebyschef's in ihrer Gesamtheit wird kennen gelernt haben. Also muss man sich äusserst freuen über den vorzüglichen Gedanken, welchen die Akademie von St. Petersburg gefasst hat, zwei vollständige Ausgaben der Werke unseres ausgezeichneten Geometers (russisch und französisch) zu veröffentlichen. Der erste Band dieser Ausgabe ist soeben erschienen und enthält die Abhandlungen [1—34] unseres Verzeichnisses.*

II.

Näherungswerte einer Funktion. Aufgaben über Minima besonderer Art. Funktionen, die sich möglichst wenig von Null entfernen. Konstruktion geographischer Karten.

Vor der Berufung Tschebyschef's auf den akademischen Lehrstuhl für angewandte Mathematik hatten ihm zwei Probleme dieser Wissenschaft — ein Problem der Theorie der Mechanismen und ein Problem der Ballistik — ein ganz neues und sehr fruchtbares Feld für wissenschaftliche Untersuchungen erschlossen, worin es ihm gelungen ist, einen neuen Zweig der Mathematik zu schaffen, der sich das Ziel setzt, Näherungsmethoden anzugeben, welche eine möglichst grosse Genauigkeit für alle Werte der Veränderlichen zwischen zwei gegebenen Grenzen liefern. Um den Gedankengang des Lesers festzuhalten, will ich jetzt die genaue chronologische Reihenfolge verlassen, um analoge Arbeiten zusammen gruppieren zu können, und ich werde damit anfangen, eine Reihe von Untersuchungen anzuführen, die als Ausgangspunkt ein Problem aus der Theorie der Mechanismen hatte, wo es sich darum handelt, die geradlinige Bewegungsrichtung eines einem schiefen Druck unterworfenen Gliedes zu sichern.

---

* Oeuvres de P. L. Tschebychef, publiées par les soins de Mm. A. Markof et N. Sonin, membres ordinaires de l'Académie Impériale des sciences. Tome I (avec portrait). St. Pétersb. 1899. Prix: 17 Mark 50 Pfg.

Der Zweck seiner Arbeit vom Jahre 1853: „Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallèlogrammes“ [11] bestand darin, die Theorie des berühmten Parallelogramms von Watt und seiner Modifikationen sowie eine Methode zu geben, um die passendsten Elemente für die Genauigkeit des Spieles des Parallelogramms zu bestimmen. Um dieses Problem zu lösen, muss man Näherungsformeln angeben, deren Charakter sich vollständig von demjenigen der durch die gewöhnliche Analysis gegebenen Formeln unterscheidet. Die Summe der n ersten Glieder der Taylor'schen Reihe giebt uns für die Funktion $f(x)$ ein Polynom, welches sich von allen andern desselben Grades der Funktion $f(x)$ für $x = a$ am meisten nähert, und man nimmt dieses Polynom als Näherungswert der Funktion $f(x)$. In diesem Problem der Theorie der Mechanismen aber handelt es sich darum, das Polynom zu finden, welches sich am meisten einer gegebenen Funktion nähert und zwar nicht für einen speziellen Wert von $x = a$, sondern für ein gegebenes Intervall von x zwischen $x = a - h$ und $x = a + h$. Dieses Polynom P ist durch die Bedingung bestimmt, dass der grösste Wert, welchen die Differenz $f(x) - P$ zwischen den gegebenen Grenzen annimmt, sich möglichst wenig von Null entferne, d. h. geringer sei als diese Differenz für alle andern Polynome desselben Grades. Wenn das betrachtete Intervall abnimmt, nähert sich der zweite Näherungswert von $f(x)$ demjenigen, den man auf Grund der Entwickelung von $f(x)$ nach Potenzen von $x - a$ findet. Solange jedoch dieses Intervall endlich bleibt, weichen die Koeffizienten dieser beiden Werte voneinander ab und es lassen sich diese Differenzen, selbst in dem Fall, dass sie klein sind, in der Theorie der Mechanismen nicht vernachlässigen.

Eine geistvolle Analyse führt die gestellte Frage auf die Integration einer Differentialgleichung von der Form zurück:

$$\frac{Q \,.\, dz}{\sqrt{(z^2-1)P}} = \frac{dy}{\sqrt{y^2-L^2}},$$

wo P und Q Polynome vom $2m^{\text{ten}}$ und m^{ten} Grad und L eine Konstante sind.

Im gewöhnlichen Fall, der sich in der Theorie der Parallelogramme ($m = 0$) findet, lässt sich die Integration sofort ausführen und liefert die allgemeine Form des Polynoms, welches die Differenzen zwischen den Koeffizienten des Näherungswertes von $f(x)$, den man auf Grund seiner Entwickelung nach Potenzen von $x - a$ gefunden hat, und denjenigen, für welche die Fehlergrenze in dem Intervall $x = a - h,\ a + h$ ein Minimum ist, bestimmt. Auf diese Weise erhält

man den Näherungswert der Funktion für ein gegebenes Intervall in der Gestalt eines Polynoms. In der 1857 erschienenen Abhandlung [20] löst Tschebyschef Aufgaben allgemeinerer Art, besonders: „Gegeben eine beliebige Funktion $F(x)$ mit n beliebigen Parametern $p_1, p_2 \dots p_n$; durch eine geeignete Wahl der Werte $p_1, p_2 \dots p_n$ die Grenze der Abweichung von Null für die Funktion $F(x)$ zwischen $x = -h$ und $x = +h$ zu einem Minimum zu machen".

Tschebyschef betrachtet speziell die drei folgenden Fälle:

$$F(x) = p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots p_{n-1} x + p_n - y$$

$$F(x) = \frac{p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots p_{n-1} x + p_n}{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots A_{m-1} x + A_m} - y$$

$$F(x) = \frac{p_1 x^{n-l-1} + p_2 x^{n-l-2} + \cdots p_{n-l-1} x + p_{n-l}}{p_{n-l+1} x^l + \cdots p_n x + 1} - y.$$

Die gemäss den gestellten Bedingungen bestimmten Funktionen geben auf diese Weise Näherungswerte von y in Form eines Polynoms oder einer rationalen Funktion mit einem gegebenen oder willkürlichen Nenner.

Nachdem er allgemeine Sätze für die Auflösung der gestellten Fragen gegeben hat, verweilt Tschebyschef speziell bei dem Fall $y = 0$, d. h. bei der Aufsuchung der Polynome und rationalen Brüche, welche sich zwischen den Grenzen $x = -h$ und $x = +h$ möglichst wenig von Null entfernen. Wir wollen uns nur einen Augenblick bei der ersten Frage aufhalten, der Aufsuchung des Polynoms $F(x)$ von der Form

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots p_{n-1} x + p_n.$$

Ebenso einfache wie geistvolle Überlegungen führen diese Frage auf ein Problem der unbestimmten Analysis zurück, nämlich auf die Bestimmung zweier Polynome $F(x)$ und $\Phi(x)$, welche der Gleichung $F(x)^2 - L^2 = (x^2 - h^2)\,\Phi(x)^2$ genügen, wo L den grössten Absolutwert des Polynoms $F(x)$ bedeutet, wenn x von $-h$ bis $+h$ variiert.

Diese Gleichung, die man leicht auf die Form bringen kann:

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)} - \sqrt{x^2 - h^2} = \frac{L^2}{\Phi(x)\,[F(x) + \Phi(x)\sqrt{x^2 - h^2}]}$$

zeigt, dass $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ ein Näherungsbruch der Entwickelung von $\sqrt{x^2 - h^2}$ in einen konvergenten Kettenbruch sein muss; man leitet daraus für das Polynom $F(x)$ die folgende endgiltige Form ab:

$$F(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{2^n}.*$$

* Bertrand, Calcul différentiel, p. 488.

Wichtige Folgerungen können aus diesem Wert der Funktion gezogen werden, welche zwischen $x = -h$ und $x = +h$ möglichst wenig von Null sich entfernt. Folgendes ist die Anwendung auf die Interpolation. Tschebyschef zeigt, dass in Bezug auf die Genauigkeit der Interpolationsresultate dasjenige Wertesystem von

$$f(x_1),\ f(x_2) \ldots f(x_n)$$

am vorteilhaftesten ist, bei welchem die Funktion

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

zwischen den Interpolationsgrenzen am wenigsten von Null sich entfernt und dass man folglich

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{2^n}$$

nehmen muss, wenn es sich darum handelt, zwischen den Grenzen $x = -h$ und $x = +h$ zu interpolieren.

Man kann daraus wichtige Folgerungen für die höhere Algebra in Gestalt von Sätzen über die Grenzen der Wurzeln ziehen; wir geben als Beispiel folgendes an:

„Wenn die Gleichung

$$x^{2l+1} + Ax^{2l-1} + \cdots + Jx + k = 0$$

nur ungerade Potenzen von x enthält, so liegt wenigstens eine der Wurzeln zwischen

$$-2\sqrt[2l+1]{\frac{k}{2}} \quad \text{und} \quad 2\sqrt[2l+1]{\frac{k}{2}}\text{“}.$$

Die möglichst wenig von Null abweichenden Funktionen, die in der uns beschäftigenden grundlegenden Abhandlung untersucht werden, können zwischen den gegebenen Grenzen wachsen und abnehmen. Später stellte sich Tschebyschef die Aufgabe, die Polynome zu bestimmen, welche möglichst wenig von Null sich entfernen und überdies der Bedingung unterworfen sind, zwischen den gegebenen Grenzen fortwährend zu- oder abzunehmen. Dies ist der Gegenstand einer Abhandlung aus dem Jahre 1873 [45]. Die Polynome, die er dabei fand, sind diejenigen, welche Tschebyschef mit dem Namen belegte „polynômes analogues aux fonctions de Legendre“. (In dem Fall, wo das Polynom von ungeradem Grad und eine stets wachsende Funktion ist, fällt dasselbe mit der Funktion X_n von Legendre zusammen.)

Er zieht noch aus der Form dieser Polynome wichtige Resultate für die Theorie der Grenzen der Wurzeln.

Endlich wandte Tschebyschef später die allgemeinen Formeln der Abhandlung „Sur les questions de minima“ [20] auf die Aufsuchung von Näherungsausdrücken einer Quadratwurzel mit Hilfe irreduktibler Brüche, sowie auf die Bestimmung von Polynomen, welche zwischen gegebenen Grenzen diese Brüche am besten darstellen [66, 73, 76], an. Die zwei Resultate, welche er in diesen Abhandlungen findet, nämlich die beste Darstellung von $\sqrt{\frac{1}{x}}$ durch die Funktion

$$A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \cdots \frac{B_n}{C_n + x},$$

wo die Koeffizienten A, B_i, C_i durch elliptische Funktionen ausgedrückt werden und die Darstellung des Bruches $\frac{1}{H - x}$ durch ein Polynom, können auf die Ermittelung der Näherungswerte der Integrale

$$\int \frac{U\,du}{\sqrt{V}} \quad \text{und} \quad \int_{-h}^{+h} \frac{f(x)\,dx}{H - x}$$

angewendet werden.

Tschebyschef hat noch eine weitere spezielle Abhandlung [43] der Frage der Quadraturen gewidmet, worin er das Integral

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\,\varphi(x)\,dx$$

betrachtet und die schönen Resultate von Herrn Hermite bezüglich des Integrals

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$$

verallgemeinert.

Tschebyschef hatte sich gründlich in Euler vertieft und erkannt, dass dieser ihm voraufgegangen war in der Betrachtung der Funktionen, welche sich möglichst wenig von Null entfernen. Eine schöne Anwendung davon gab er in dem Studium der geographischen Projektionen. In seinen Untersuchungen über die konische Projektion bestimmt Euler die Koeffizienten der Projektion nach der Bedingung, dass eine Ellipse, die sogenannte „ellipsis alterationis“ sich möglichst wenig von einem Kreis unterscheide.* Diese den Gedanken, mit denen

* De projectione geographica Delisliana in mappa generali Imperii Russici usitata (Acta Acad. Petrop. pro anno 1777).

sich Tschebyschef seit 1853 beschäftigte, entsprechende Bemerkung Euler's hat ihn wahrscheinlich dazu geführt, sich mit der Konstruktion geographischer Karten zu beschäftigen und sich die Aufgabe zu stellen, unter allen Projektionen, welche die Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen unverändert lassen, diejenige auszusuchen, für welche die Veränderung des Vergrösserungsverhältnisses sich in der ganzen Karte auf ein Minimum reduziert. Diese Aufgabe löst Tschebyschef durch folgenden Satz: „Unter allen Projektionen, welche die Ähnlichkeit der unendlich kleinen Elemente bewahren, giebt diejenige, für welche das Vergrösserungsverhältnis längs des Umfangs des dargestellten Gebietes konstant ist, die geringsten Änderungen dieses Verhältnisses innerhalb des Umfangs". Wie Lagrange für den Logarithmus des Vergrösserungsverhältnisses die Formel

$$\log m = U - \log \frac{2}{e^{\mu} + e^{-\mu}}$$

gegeben hatte, wo U das Integral der Gleichung

$$\frac{d^2 U}{du^2} + \frac{d^2 U}{dt^2} = 0$$

ist, so stellt der von Tschebyschef 1856 ohne Beweis gegebene Satz [17] eine Anwendung seiner Theorie der Funktionen, die möglichst wenig von Null abweichen, auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen dar; der Beweis des Satzes wurde durch Herrn D. Gravé im Jahre 1894* gegeben.

Tschebyschef hat eine Anwendung seines Satzes auf die geographische Karte von Russland gegeben, welche wegen der Ausdehnung des Landes besondere Schwierigkeiten bietet. Während die stereographische Projektion für das europäische Russland Änderungen des Vergrösserungsverhältnisses, welche bis zu $^1/_{34}$ des Normalwertes dieses Verhältnisses reichen, aufweist, vermindert die durch Tschebyschef empfohlene Projektion diesen Unterschied bis auf $^1/_{50}$ dieses Wertes. Es ist dies der höchste Grad von Genauigkeit, den man erreichen kann, wenn man die Meridiane und Parallelkreise durch Kreise oder Gerade darstellt [18].

---

* Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Caen. 1894.

III.

Integration der irrationalen Differentiale.

Auf die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - L^2}} = \frac{Q\,dz}{\sqrt{(z^2-1)P}}$$

führte Tschebyschef das Problem der Bestimmung des Näherungswerts einer Funktion zurück in der Abhandlung [11], welche der Ausgangspunkt seiner Untersuchungen über die Integration der irrationalen Differentiale gewesen ist; diese Gleichung zeigt in der That, dass

$$\int \frac{Q\,dz}{\sqrt{(z^2-1)P}},$$

wo P und Q Polynome sind, auf einen logarithmischen Ausdruck zurückgeführt werden kann. Seit jener Zeit wurde die Theorie der Integration in endlicher Form ein Lieblingsthema des berühmten Geometers; hier, wie sonst überall, erhielt er bemerkenswerte Ergebnisse.

In der Abhandlung [12] giebt Tschebyschef eine Methode, um den algebraischen Bestandteil in dem Ausdruck des Integrals

$$\int \frac{f(x)\,dx}{F(x)\sqrt[m]{\Theta(x)}}$$

zu finden, wo $f(x)$, $F(x)$, $\Theta(x)$ beliebige ganze Funktionen und m eine positive ganze Zahl darstellen; er giebt darin gleichfalls eine Methode, um für sich allein alle logarithmischen Glieder zu bestimmen, mit Hilfe der analytischen Bedingungen, welche diese erfüllen müssen. In dieser Abhandlung zeigt er auch, dass die gewöhnlichen Methoden der Integration von binomischen Differentialen mit rationalen Exponenten alle Fälle einschliessen, wo diese Integration mit Hilfe algebraischer und logarithmischer Funktionen möglich ist.

In der Abhandlung [14] zeigt Tschebyschef, wie man nach den in der Abhandlung [12] gegebenen Bedingungen die logarithmischen Glieder in dem einfachsten Fall finden kann, wo das Integral die Quadratwurzel aus einem Polynom vom dritten oder vierten Grade enthält. Er beweist auch, dass die Integration eines elliptischen Differentials, wenn sie in endlicher Form ausgeführt werden kann, sich

schliesslich auf die Auswertung von Integralen folgender Form zurückführen lässt: $\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}$.

In einer besonderen, der Integration dieses Differentials gewidmeten Abhandlung [26] giebt Tschebyschef für den Fall, wo α, β, γ, δ rational sind, eine Methode, welche mittelst algebraischer Operationen in beschränkter Zahl darauf führt, entweder zu finden, ob für einen gewissen bestimmten Wert von A das obenerwähnte Integral in endlicher Form sich ausdrücken lässt, oder zu erkennen, ob dies für keinen Wert von A möglich ist. Diese Methode hat einen grossen Vorzug vor derjenigen Abel's, welche auf eine Reihe von Operationen führt, die sich in unbestimmter Weise verlängern können, ohne je ein entscheidendes Resultat zu liefern.*

In diesen Fragen erkannte Tschebyschef die ungeheure Wichtigkeit der durch Abel in die Frage der Integration in endlicher Form eingeführten Kettenbrüche für die Analysis. Nachdem seine Aufmerksamkeit einmal auf diesen Gegenstand gelenkt war, führte sie ihn auf die schönsten Anwendungen der Theorie der Kettenbrüche und der grösste Teil seiner ferneren Untersuchungen ist innig mit diesem Hilfsmittel der Analysis verbunden, welches niemand seit Lagrange und Abel mit einer Leichtigkeit gehandhabt hat, die derjenigen des berühmten russischen Geometers gleichgekommen wäre. Bevor ich jedoch zu diesen neuen Anwendungen übergehe, will ich noch die Untersuchungen Tschebyschef's bezüglich einer höheren Frage der Theorie der Integration irrationaler Differentiale erwähnen, wobei die Verwendbarkeit der Kettenbrüche aufhört; es ist dies die Integration irrationaler Differentiale, welche eine Kubikwurzel enthalten [30, 36].

In der Abhandlung [12] hat Tschebyschef gezeigt, dass das Integral $\int \frac{f(x)\,dx}{F(x)\sqrt[m]{R(x)}}$,

wenn es sich in endlicher Form ausdrücken lässt, von der Form sein wird:

$$Z\sqrt[m]{R^{m-1}}+\sum A\cdot\log\left[\varphi\left(\sqrt[m]{R}\right)\varphi^{\alpha}\left(\alpha\sqrt[m]{R}\right)\ldots\varphi^{\alpha^{m-1}}\left(\alpha^{u-1}\sqrt[m]{R}\right)\right],$$

wo Z und φ rationale Funktionen und α eine primitive Wurzel der Gleichung $x^m-1=0$ sind. Für das Integral

* Der allgemeinere Fall, dass α, β, γ, δ irgendwelche reelle Werte haben, wurde von einem Schüler Tschebyschef's, Zolotaref, betrachtet und durch eine geistvolle Methode mit Hilfe der Theorie ganzer komplexer Zahlen gelöst.

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt[m]{R(x)}}\,dx$$

bietet sich folgende algebraische Aufgabe dar: Die Funktionen

$$\varphi\left(\sqrt[m]{R}\right),\ \varphi\left(\alpha\sqrt[m]{R}\right)\ldots\varphi\left(\alpha^{m-1}\sqrt[m]{R}\right)$$

zu finden, welche die Gleichung:

$$\varphi\left(\sqrt[m]{R}\right)\cdot\varphi\left(\alpha\sqrt[m]{R}\right)\ldots\varphi\left(\alpha^{m-1}\sqrt[m]{R}\right)=C$$

befriedigen, wo C eine Konstante bedeutet. Für die Integrale der Differentiale, welche auf eine Quadratwurzel führen, lässt sich die Frage leicht zurückführen auf die, die Polynome P und Q zu finden, welche der Gleichung $P^2-Q^2\cdot R=C$ genügen, und sie kann mit Hilfe der Kettenbrüche aufgelöst werden. Für die Integrale der Differentiale, welche auf eine Kubikwurzel führen, lässt sich die Frage auf das Problem zurückführen, drei Polynome X, Y, Z so zu bestimmen, dass der Grad des Ausdrucks

$$X+Y\sqrt[3]{R_1R_2^2}+Z\sqrt[3]{R_1^2R_2}$$

($R=R_1\cdot R_2^2$) möglichst klein sei. Diese Untersuchung erforderte eine neue Methode, man steht einem der schwierigsten Probleme gegenüber, mit dem sich Jacobi und M. Hermite beschäftigt haben, und das in den letzten Jahren wiederum die Aufmerksamkeit hervorragender Mathematiker auf sich gezogen hat. Diese neue Methode wurde durch Tschebyschef in der Abhandlung [36] auseinandergesetzt, wo der treffliche Mathematiker die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angiebt, dass das Integral

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt[3]{x^3+ax+b}}$$

in endlicher Form ausgewertet werden kann.

IV.

Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate. Reihenentwickelung fortschreitend nach den Nennern der Näherungsbrüche. Grenzwerte der Integrale in dem Fall, wo die integrierte Funktion in zwei Faktoren zerlegbar ist.

Durch seine Untersuchungen über Minimaaufgaben und über die Integration irrationaler Differentiale zum Studium der Kettenbrüche geführt, machte Tschebyschef alsbald eine glänzende Anwendung davon auf

diese wichtige Frage der Interpolation, welche nach einer von Herrn Laisant in seinem neuen Buch über die Philosophie und den Unterricht der Mathematik gemachten richtigen Bemerkung eines der interessantesten Kapitel der natürlichen Philosophie darstellt. Es ist eine Aufgabe der Ballistik, die Tschebyschef durch das wissenschaftliche Komitee der höheren Verwaltung der russischen Artillerie gestellt wurde und die ihn veranlasste, seine Aufmerksamkeit der Interpolation zu widmen.

In dem Problem der parabolischen Interpolation handelt es sich darum, ein Polynom

$$y = F(x) = a + bx + cx^2 + \cdots gx^{m-1} + hx^m$$

zu finden, welches für die $n+1$ Werte $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$ der Veränderlichen die $n+1$ entsprechenden Werte der unbekannten Funktion $f(x)$ mit einem möglichst kleinen Fehler giebt. Wenn $m = n$, so ist die Aufgabe bestimmt; ist $m < n$, so hört sie auf es zu sein; sie wird es jedoch wieder, wenn man die Bedingung hinzufügt, dass:

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{2} [y - f(x_i)]^2 \Theta^2(x_i)$$

ein Minimum sein soll. In diesem Fall der Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate gab Tschebyschef für das Polynom $y = F(x)$ eine bemerkenswerte Formel, in welche die Nenner $\psi_m(x)$ der Näherungsbrüche der Entwickelung in einen Kettenbruch für die Summe:

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\Theta^2(x_i)}{x - x_i} = \frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1} - \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2} - \frac{1}{\alpha_3 x + \beta_3} - \cdots$$

eingehen [15, 16]. Diese Formel hat die wichtige Eigenschaft, dass es nicht nötig ist, von vornherein die Anzahl der Glieder dafür zu bestimmen und dass man diese der Reihe nach finden kann, was der neuen Methode einen grossen praktischen Vorzug giebt. Alle wichtigen Einzelheiten für die Anwendung (die rekurrierenden Formeln, welche die Koeffizienten der Formel gegenseitig in Beziehung setzen, sowie die Formeln für die Auswertung des mittleren quadratischen Fehlers, dessen Wert die Anzahl der Glieder der Formel erkennen lässt, die man nehmen muss, um einen angezeigten Genauigkeitsgrad zu erhalten) wurden von Tschebyschef getrennt in der Abhandlung [25] veröffentlicht.

Diese neue Anwendung der Kettenbrüche lieferte Tschebyschef die Gelegenheit, die Theorie dieser Brüche zu vertiefen und einige schöne Resultate zu finden, z. B. folgende bemerkenswerte Eigenschaften der Nenner der Näherungsbrüche $\psi_m(x_i)$:

$$\sum_{i=0}^{i=n} \psi_\mu(x_i) \cdot \psi_\nu(x_i) \Theta^2(x_i) = 0 \, (\mu \lesseqgtr \nu)$$

$$\sum_{i=0}^{i=n} \psi_\mu^2(x_i) \Theta^2(x_i) = \frac{1}{\alpha_{\mu+1}},$$

wo $\alpha_{\mu+1}$ der Koeffizient von x in einem der unvollständigen Quotienten ist.*

Die allgemeine Interpolationsformel nach der Methode der kleinsten Quadrate, die durch Tschebyschef gegeben wurde, kann spezialisiert werden, indem man verschiedene besondere Annahmen über die Wahl der Reihenfolge der Werte $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ trifft, sowie über die Form der willkürlichen Funktion $\Theta^2(x)$.

1°. Man kann annehmen, dass die Werte der Unbekannten ein lineares Continuum bilden. Dann verwandelt sich die Summe $\sum_i \frac{\Theta^2(x_i)}{x - x_i}$ in ein Integral, die Anzahl der Näherungsbrüche wird unendlich und die Interpolationsformel wird zu einer Entwickelung in eine unendliche Reihe.

Für $\Theta^2(x) = dx$ hat man eine Entwickelung nach den Funktionen von Legendre X_n [16], wenn man annimmt, dass $x_0, x_1 \ldots$ ein lineares Continuum zwischen -1 und $+1$ bilden.

Wenn $\Theta^2(x)$ proportional ist mit $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und die Reihenfolge der Werte $x_0, x_1 \ldots$ ein Continuum zwischen -1 und $+1$ bildet, hat man die Entwickelung in eine Fourier'sche Reihe, die nach den Cosinus der Vielfachen des Arguments fortschreitet.

Zwei sehr bemerkenswerte Fälle bieten sich auch dar [23], wenn $x_0, x_1 \ldots$ ein lineares Continuum zwischen $-\infty$ und $+\infty$ bilden und wenn die Funktion $\Theta^2(x)$ proportional mit $\sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-k \cdot x^2}$ ist, oder mit $k \cdot e^{-kx}$.

Endlich hielt sich Tschebyschef auch bei dem Spezialfall auf, wo $\Theta^2(x)$ proportional mit

---

* Diese Formeln wurden auch durch Herrn Rouché gefunden (Journal de l'École Polytechnique, cahier 37).

$$\frac{1}{(1+x)^{\lambda}(1-x)^{\mu}}$$

ist und er hat die Abhandlung [38] dem Beweis der folgenden Fundamentaleigenschaft der Nenner T_m der korrespondierenden Näherungsbrüche gewidmet:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_n T_m}{(1+x)^{\lambda}(1-x)^{\mu}}\, dx = 0\,(m \gtrless n).$$

Diese Funktionen T_n, die zum ersten Mal von Jacobi* ins Auge gefasst wurden, hat Tschebyschef bezeichnet als „Funktionen analog den Funktionen von Legendre.“** Sie haben folgende wichtige Eigenschaft: das Integral

$$\int_{-1}^{+1} \frac{Z^2 dx}{(1+x)^{\lambda}(1-x)^{\mu}},$$

wo Z irgend ein Polynom vom n^{ten} Grade ist, wird ein Minimum, wenn man für Z die Funktion T_n nimmt multipliziert mit einem konstanten Faktor.

Auf dieser Eigenschaft der Funktionen T_n beruht die Studie der Polynome, welche sich möglichst wenig von Null entfernen (s. Kap. II) und welche wichtige Anwendungen in der Aufsuchung der Grenzen der Wurzeln und in der Konstruktion des Centrifugalregulators [45, 46] erfahren haben.

2°. Bei einer anderen wichtigen Annahme, nämlich wenn man die bekannten Werte $f(h)$, $f(2h) \ldots f(nh)$ der gesuchten Funktion äquidistant und von gleichem Gewicht voraussetzt, lässt sich die interpolatorische Funktion $F(x)$ nach den Nennern des Kettenbruches, der aus der Entwickelung des Ausdrucks

$$\frac{1}{x-h} + \frac{1}{x-2h} + \cdots \frac{1}{x-nh}$$

hervorgeht, entwickeln. Diese Nenner werden mit $\Delta x = h$ bis auf einen konstanten Faktor durch die Formel ausgedrückt:

---

* Werke, Band VI Seite 285.

** Man giebt allgemeiner diesen Namen den Nennern der Näherungsbrüche in der Entwickelung eines Integrals von der Form

$$\int_a^b \frac{f(z)\,dz}{x-z}$$

in einen Kettenbruch. Die Grundeigenschaften dieser Funktionen sind entwickelt in dem interessanten Werk von H. Possé: Sur quelques applications des fractions continues algébriques. St. Pétersbourg 1886.

$$\psi_m(x) = \Delta^m (x-1)(x-2)\ldots(x-m)(m+n-1-x)\ldots(m-x)$$

und entsprechen in der inversen Differenzenrechnung, wie man es an ihrem Aussehen erkennt, den Funktionen von Legendre, welche bekanntlich bis auf einen konstanten Faktor gleich

$$\frac{d^m (x^2-1)^m}{dx^m}$$

sind.

Die Reihe, die man in diesem Fall für die interpolatorische Funktion mit Hilfe der äquidistanten Werte mit gleichem Gewicht für die unbekannte Funktion erhält, lässt nichts zu wünschen übrig, denn alle Glieder lassen sich leicht mit Hilfe der Differenzen von gegebenen Werten berechnen. Der Beweis dieser Formel, welche zum ersten Mal im Jahre 1858 [21, 24, 25] veröffentlicht wurde, ist erst im Jahre 1864 gegeben worden [29]. In einer Abhandlung [48] vom Jahre 1875 wurde dieser Beweis vervollständigt und die Formeln selbst wurden durch andere ersetzt, die für die Anwendung bequemer sind. Tschebyschef hat in dieser Abhandlung auch den allgemeineren Fall ins Auge gefasst, wo die Gewichte der Resultate ungleich sind und wo sie sich mit Hilfe der Funktion:

$$\Theta^2(x) = \frac{\Gamma(x+\alpha)\,\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(x)\,\Gamma(m-x)}$$

ausdrücken.

In diesem Falle kann man auch zu eleganten Formeln kommen. Tschebyschef vollendete dabei auch den Beweis seiner Interpolationsformel in dem Fall äquidistanter Werte [29], sowie in dem allgemeinen Falle [25], indem er zeigte, dass für jeden weiteren Wert, den man in der Interpolationsformel hinzufügt, man allmählich den mittleren quadratischen Fehler vermindert, dessen Ausdruck leicht zu ermitteln ist. Man kann auf diese Weise unmittelbar erkennen, welches die Anzahl der Glieder der Reihe ist, die man nehmen muss, um einen vorgeschriebenen Grad der Genauigkeit zu erhalten.

Bevor wir die Untersuchungen Tschebyschef's über die Interpolation verlassen, müssen wir noch die Abhandlung [29] erwähnen, die der Frage der Interpolation für den Fall einer grossen Zahl durch Beobachtungen gelieferter Werte gewidmet ist. Tschebyschef zeigte in dieser Abhandlung, dass, wenn man die Funktion:

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots A_n x^n$$

für alle Werte von x zwischen $-h$ und $+h$ kennt und man diese Werte als äquidistant und unendlich benachbart annimmt, man die

Koeffizienten $A_1, A_2 \ldots A_n$ durch einfache Addition und Subtraktion der Werte der Funktion $F(x)$ bestimmen kann. Die Ausdrücke, welche die mit konstanten Faktoren behafteten Koeffizienten bestimmen, haben die Form:

$$sA_i = \int_{-h}^{\eta_1} F(x)dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)dx + \cdots (-1)^{\nu} \int_{\eta_\nu}^{+h} F(x)dx.$$

Es handelt sich alsdann darum, den Faktor s sowie die Werte $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_\nu$ zu bestimmen.

Diese Frage wird durch eine analoge Methode wie in [20] gelöst. Die Nenner der Näherungsbrüche der Entwickelung gewisser Funktionen in einen Kettenbruch geben die Gleichungen, deren Wurzeln $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_\nu$ sind.

So sind z. B. in einem speziellen Fall, wo es sich darum handelt, den letzten Koeffizienten A_n für ein ungerades n zu bestimmen, $\eta_1, \eta_2 \ldots$ die Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}} + (x-\sqrt{x^2-h^2})^{\frac{n+1}{2}}}{2} = 0.$$

Aus diesen Resultaten kann man eine Interpolationsmethode entnehmen, wenn man beachtet, dass, falls man die Werte in endlicher Zahl für die Funktion $F(x)$ hat:

$$F(x_1), F(x_2), F(x_3) \ldots F(x_n),$$

und man mit Hilfe derselben die angenäherten Ausdrücke der Integrale

$$\int_{-h}^{\eta_1} F(x)\,dx, \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)\,dx \ldots$$

und folglich auch von A_i ermittelt, man für die Funktion $F(x)$ eine Näherungsformel erhält, welche zugleich eine Interpolationsformel* sein wird. Bemerken wir, dass Tschebyschef die Interpolationsmethode, deren Grundgedanken wir soeben auseinandergesetzt haben, auf die Bestimmung der Bahn eines Planeten angewendet hat; leider haben wir über diesen Gegenstand nur eine sehr kurze Andeutung [89].

---

* In einer neuerdings veröffentlichten Arbeit (Sur les valeurs limites des intégrales en leur rapport avec l'interpolation. Mem. de l'Acad. de St. Pétersbourg, série VIII, tome VI) dehnt Herr Markof die Methode von Tschebyschef auf den Fall aus, wo die interpolatorische Funktion die Form hat:

$$A_0\psi_0(x) + A_1\psi_1(x) + A_2\psi_2(x) + \cdots$$

Beispiel:

$$A_0 + A_1 \sin x + A_2 \cos x + A_3 \sin(2x) + \cdots$$

Kommen wir jedoch wieder auf die allgemeine von Tschebyschef für die Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate gefundene Formel zurück; sie führt auf bemerkenswerte Ungleichungen bezüglich der bestimmten Integrale, die der Gegenstand zahlreicher und interessanter Untersuchungen gewesen sind.

Wenn man annimmt, dass die Werte $x_0, x_1, x_2 \ldots$ ein lineares Continuum zwischen a und b bilden und $\Theta^2(x)$ irgend eine reelle stetige oder unstetige Funktion bezeichnet, so giebt die allgemeine Formel von Tschebyschef für eine Funktion $F(x)$, deren Werte zwischen $x = a$ und $x = b$ man kennt, eine Reihenentwickelung, die nach den Nennern $\psi_n(x)$ der aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche des aus der Entwickelung des Integrals:

$$\int_a^b \frac{\Theta^2(z)\,dz}{x - z}$$

hervorgehenden Kettenbruchs fortschreitet.

Indem man mit Hilfe dieser neuen Formel zwei beliebige Funktionen u und v von x zerlegt und das Produkt $uv\Theta^2(x)dx$ zwischen den Grenzen a und b integriert, findet man für das Integral

$$\int_a^b uv\,\Theta^2(x)\,dx$$

eine bemerkenswerte Reihe, welche den Wert dieses Integrals mit Hilfe von Integralen der Form

$$\int_a^b u\psi_n(x)\,\Theta^2(x)dx,$$

$$\int_a^b v\psi_n(x)\,\Theta^2(x)dx \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi_n{}^2(x)\,\Theta^2(x)dx$$

ergiebt.

Bricht man die Entwickelung bei irgend einem Gliede ab, so muss man ein Ergänzungsglied hinzufügen, dessen Ausdruck von Tschebyschef in der Abhandlung [65] gegeben worden ist. Dieses Ergänzungsglied besitzt folgende Eigenschaften: 1. Sein numerischer Wert kann das Produkt KAB nicht übersteigen, wo K eine wesentlich positive Grösse, A und B die grössten numerischen Absolutwerte der Ableitungen

$$\frac{d^n u}{dx^n}, \quad \frac{d^n v}{dx^n}$$

für die Werte von x zwischen a und b bedeuten.

2. Wenn die Ableitungen

$$\frac{d^n u}{dx^n}, \quad \frac{d^n v}{dx^n}$$

zwischen a und b keinen Zeichenwechsel erleiden, so hat daher das Ergänzungsglied das Zeichen des Produkts

$$\frac{d^n u}{dx^n} \cdot \frac{d^n v}{dx^n}.$$ *

Bricht man die Reihe von Tschebyschef beim ersten Glied ab, so hat man:

$$\int_a^b uv\,\Theta^2(x)\,dx = \frac{\int_a^b u\,\Theta^2(x)\,dx \cdot \int_a^b v\,\Theta^2(x)\,dx}{\int_a^b \Theta^2(x)\,dx} + R_1,$$

wo R_1 das Vorzeichen des Produkts

$$\frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx}$$

hat, wenn diese Ableitungen zwischen den Grenzwerten des Integrals keinen Zeichenwechsel erfahren. Hieraus erhält man sofort den folgenden Tschebyschef zu verdankenden Satz: „Wenn die Funktionen u und v zwischen den Grenzen 0 und 1 der Veränderlichen gleichmässig zu- oder abnehmen, so hat man:

$$\int_0^1 uv\,dx > \int_0^1 u\,dx \cdot \int_0^1 v\,dx;$$

im entgegengesetzten Fall hat man

$$\int_0^1 uv\,dx < \int_0^1 u\,dx \cdot \int_0^1 v\,dx.$$ **

---

* Die Formeln Tschebyschef's sind Gegenstand von Abhandlungen der Herren Andreief, Imschenetzky, Korkine, Possé und Sonine gewesen. Wir verweisen in betreff der russischen Arbeiten auf unsere in dem „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" veröffentlichten Berichte, Band XV, 1883 (S. 222) und Band XIX, 1887 (S. 222). In einer neuerdings veröffentlichten Abhandlung: „Sur quelques inégalités relatives aux intégrales définies (Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg, série VIII, tome VI) veröffentlicht Herr Sonine ausgedehnte Untersuchungen über die angenäherte Berechnung der bestimmten Integrale, die einen neuen Beweis und eine Verallgemeinerung der Formeln Tschebyschef's enthalten.

** Dieser Satz wurde zum ersten Mal im Jahre 1883 durch Herrn Hermite in seinem „Cours de la Faculté des sciences de Paris" (2e édition p. 48) mit einem Beweis von Herrn Picard veröffentlicht. Siehe auch Korkine „Sur un théorème de M. Tchébychef" (Comptes rendus, t. XCVI).

V.

Neue Art von Problemen der Variationsrechnung. Entwickelung in nach den Funktionen R_n fortschreitende Reihen. Successive Minima des Ausdrucks $x - ay - b$.

Die auf die parabolische Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate bezüglichen Arbeiten führten Tschebyschef auf mehrere andere Forschungen, besonders auf diejenige einer neuen der Variationsrechnung analogen Rechnungsart.

Die Aufgabe, ein Polynom Y unter der Bedingung zu bestimmen, dass die Summe

$$\sum_i \frac{1}{2}[Y - f(x_i)]^2 \Theta^2(x_i)$$

ein Minimum sei, kann als ein Spezialfall der allgemeineren betrachtet werden, ein Polynom Y so zu bestimmen, dass die Summe

$$\sum_{i=1}^{i=n} F(x_i, Y_i', Y_i'', \ldots)$$

ein Minimum sei, wobei $Y', Y'' \ldots$ die Ableitungen des Polynoms Y und $Y_i, Y_i', Y_i'' \ldots$ die Werte dieses Polynoms und der Ableitungen für $x = x_i$ sind. Ein bemerkenswertes Resultat verbindet dieses Problem eng mit der Variationsrechnung. Bezeichnen wir zur Abkürzung die Ableitungen:

$$\frac{\partial F(x, Y, Y', Y'' \ldots)}{\partial Y}, \quad \frac{\partial F(x, Y, Y', Y'' \ldots)}{\partial Y'}, \quad \frac{\partial F(x, Y, Y', Y'' \ldots)}{\partial Y''} \text{ u. s. w.}$$

bezüglich mit $M, N, P \ldots$, und das Produkt $(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ mit $\varphi(x)$, so muss der Ausdruck

$$M\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{dN\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2P\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} \cdots$$

einer ganzen Funktion von x gleich sein, bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{x^m}$.

Von der dem absoluten Maximum und Minimum entsprechenden Aufgabe geht Tschebyschef auf die dem relativen Maximum und Minimum entsprechende über. Er behandelt sie in der allgemeinsten Form, wenn es sich darum handelt, die auf die Werte $a_1, a_2 \ldots$ der Veränderlichen x ausgedehnte Summe:

$$\sum \Phi_0(x, Y, Y', Y'' \ldots)$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wobei die Koeffizienten des Polynoms Y den Bedingungen unterworfen sind:

$$\sum \Phi_1(x, Y, Y', Y'' \cdots) = \alpha_1, \quad \sum \Phi_2(x, Y, Y', Y'' \cdots) = \beta_1, \cdots;$$

von diesen Summen wird angenommen, dass die erste auf die Werte $b_1, b_2 \ldots$ von x, die zweite auf die Werte $c_1, c_2 \ldots$ von x u. s. w. ausgedehnt sei. Im allgemeinsten Fall ist die Wertgruppe $b_1, b_2 \ldots$ verschieden von $c_1, c_2 \ldots$ und ebenso von $a_1, a_2 \ldots$

In einem Spezialfall, wo Y in die Funktionen $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2 \ldots$ nur im zweiten Grad und die Ableitungen $Y', Y'' \ldots$ nur im ersten Grad eingehen, mit nur von x abhängigen Koeffizienten, kommt die Aufgabe darauf hinaus, das Polynom Y vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade so zu bestimmen, dass der Ausdruck

$$uY - v,$$

wo u und v zwei Funktionen von x sind, sich auf eine ganze Funktion Z von x bis auf die Glieder der Ordnung $\frac{1}{x^m}$ reduziert. Diese Aufgabe, die Polynome Y und Z so zu bestimmen, dass der Ausdruck

$$uY - Z$$

möglichst wenig von irgend einer Funktion v abweiche, ist in den Abhandlungen [31, 32] gelöst. Sei

$$q_0 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \cdots$$

der Kettenbruch, der aus der Entwickelung der Funktion u hervorgeht und seien $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3} \cdots$ die Näherungsbrüche dieses Kettenbruchs. Wenn man mit E den ganzen Teil einer Funktion bezeichnet, so sind die Polynome Y und Z, für welche der Ausdruck $uY - Z$ sich möglichst wenig von der Funktion v unterscheidet, durch folgende Reihen gegeben:

$$Y = (Eq_1Q_1v - q_1EQ_1v)Q_1 - (Eq_2Q_2v - q_2EQ_2v)Q_2 + \cdots$$

$$Z = -Ev + (Eq_1Q_1v - q_1EQ_1v)P_1 - (Eq_2Q_2v - q_2EQ_2v)P_2 + \cdots$$

Diese Reihen liefern für Y und Z ganze Werte, deren Grad um so höher ist, eine je grössere Zahl von Gliedern man nimmt; diese Werte von Y und Z sind übrigens diejenigen, welche die Differenz $uY - Z$ so nahe an v bringen, als dies mit Hilfe der ganzen Funktionen von

gleichem Grade wie Y und Z möglich ist und selbst mit Funktionen von höherem Grade, jedoch von einem geringeren, als die Funktionen ihn haben, die man erhält, wenn man in den Ausdrücken von Y und Z ein Glied mehr nimmt. Die auf diese Weise erhaltenen Werte von Y und Z resultieren aus einer bemerkenswerten von Tschebyschef aufgefundenen Entwickelung für jede Funktion v, die sich in eine nach absteigenden ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln lässt. Eine solche Funktion lässt sich immer entwickeln nach den Werten der Funktionen

$$R_1 = uQ_1 - P_1,\ R_2 = uQ_2 - P_2, \ldots\ R_n = uQ_n - P_n,$$

und die Entwickelung hat folgende Form:

$$v = Ev + (Eq_1 Q_1 v - q_1 E Q_1 v) R_1 + (Eq_2 Q_2 v - q_2 E Q_2 v) R_2 + \cdots$$

In dem gewöhnlichen Fall, wo die unvollständigen Quotienten $q_1, q_2 \ldots$ alle vom ersten Grad sind, nimmt die Entwickelung die Form an:

$$v = Ev + A_1 L_1 R_1 - A_2 L_2 R_2 + A_3 L_3 R_3 - \cdots,$$

wobei L_n den Koeffizient von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von $Q_n v$ nach absteigenden Potenzen von x bedeutet. Für $v = \frac{1}{x-y}$ hat man sofort

$$L_n = Q_n(y),$$

woraus

$$\frac{1}{x-y} = A_1 Q_1(y) R_1(x) - A_2 Q_2(y) R_2(x) + A_3 Q_3(y) R_3(x) - \cdots$$

Diese bemerkenswerte in der Abhandlung [31] angegebene Formel ist die Verallgemeinerung der bekannten Reihe von Heine*:

$$\frac{1}{x=y} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) P_n(y) Q_n(x),$$

wo P_n und Q_n Kugelfunktionen erster und zweiter Art sind. Die in [32] angewandte Analyse zeigt eine bemerkenswerte Einfachheit; sie beruht auf der Berechnung der ganzen Teile der Funktionen und ist, obwohl vollständig unabhängig von den Voraussetzungen bezüglich der Konvergenz, durchaus streng.

---

* Handbuch der Kugelfunktionen, 1861, S. 39. Diese Reihe wurde zum ersten Mal in der Schrift: Theorie der Anziehung eines Ellipsoids (Crelle's Journal Bd. 42, 1851) gegeben. Siehe die bemerkenswerte Verallgemeinerung dieser Reihe durch Pochhammer in seiner Arbeit: Über die Entwickelung von Funktionen nach den Integralen einer Klasse von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. (Crelle's Journal Bd. 74.)

Bemerken wir noch, dass die Auflösung der Aufgabe, die Polynome Y und Z zu finden, welche die Differenz $uY - Z$ der Funktion v möglichst nahe bringen, später durch Tschebyschef in der Abhandlung [51] vervollständigt worden ist.

Eine ganz analoge Frage lässt sich für die Zahlen stellen. Bekanntlich sind, wenn es sich darum handelt, zwei ganze Zahlen x und y so zu bestimmen, dass die Differenz $x - ay$, wo a eine inkommensurable Zahl bedeutet, unbegrenzt der Null sich nähert, die Zahlen x und y durch die Entwickelung von a in einen Kettenbruch bestimmt. Aber die Aufgabe, zwei Zahlen x und y so zu bestimmen, dass $x - ay$ sich unbegrenzt b nähere, wurde zuerst von Tschebyschef gestellt und gelöst in der schönen Abhandlung [33]. Eine geistvolle und tiefgehende Analyse führt auf folgenden Satz: „Wenn a eine beliebige inkommensurable Zahl bedeutet, so giebt es eine unendliche Anzahl von Systemen ganzer Zahlen x und y von der Beschaffenheit, dass die lineare Funktion

$$x - ay - b,$$

wo b eine beliebige Konstante bedeutet, ihrem absoluten Wert nach kleiner wird als $\frac{1}{2y}$." Der Ausdruck $m - na$, wo m und n ganze Zahlen sind, kann also irgend eine reelle Zahl mit einer beliebig grossen Genauigkeit darstellen. Die elegante und wichtige Anwendung dieses Satzes auf die Funktionentheorie durch Herrn Hermite [80] ist heute klassisch.

In der Abhandlung [35] hat Tschebyschef seine neue Berechnungsweise der Maxima und Minima auseinandergesetzt, die sich von der Variationsrechnung insofern unterscheidet, als die Form der bei der gewöhnlichen Rechnung ganz unbestimmten Funktion Y in diesen Problemen einer neuen Gattung als gegeben angenommen ist. Nachdem er die allgemeinen Prinzipien der Auflösung dieser Probleme angegeben hat, wendet er sie auf die Aufgabe der Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate an. In dem Fall des absoluten Minimums findet er mit Leichtigkeit die allgemeine Interpolationsformel, von der wir im vorhergehenden Kapitel gesprochen haben; er fasst jedoch auch einen Spezialfall ins Auge, in welchem einer der Koeffizienten des Polynoms Y einen angegebenen Wert haben soll, was ihm Gelegenheit bietet, seine auf relative Maxima und Minima bezüglichen Formeln anzuwenden. Er gab später eine andere Anwendung dieser Formeln in der Abhandlung [63], wo er das Verhältnis zweier für die

gleichen Werte der Variabeln genommener Integrale ins Auge fasst. Die dort gestellte Aufgabe lässt sich auf die folgende zurückführen: „Unter allen Polynomen Z von gegebenem Grad, die der Gleichung:

$$\int_{-1}^{+1} Z^2 \Theta(x) dx = 1$$

genügen, das Polynom herauszufinden, für welches das Integral

$$\int_{-1}^{+1} Z^2 \Theta_0(x) dx$$

ein Maximum oder Minimum wird, wo $\Theta(x)$ und $\Theta_0(x)$ zwei gegebene Funktionen bedeuten." Diese Aufgabe lässt sich mit Hilfe der Formeln der Abhandlung [35] lösen und die Auflösung führt auf eine neue Anwendung der Polynome von Legendre. Man hat in der That folgenden Satz: „Wenn Z ein Polynom von niedrigerem Grad als n bedeutet, das zwischen $x = -1$ und $x = +1$ keinen Zeichenwechsel erfährt, so kann der numerische Wert des Bruchs

$$\int_{-1}^{+1} x Z dx : \int_{-1}^{+1} Z dx$$

bezüglich die grösste Wurzel der Gleichungen

$$X_{l+1} = 0 \text{ und } X_{l+1} + X_l = 0$$

nicht übersteigen, je nachdem $n = 2l$ oder $2l - 1$."

Als Anwendung dieses Satzes giebt Tschebyschef die Grenze des Verhältnisses eines Kurvensegments zu dem aus der Kurve und zwei Geraden, parallel zu den Koordinatenaxen, gebildeten Dreieck an.

VI.

Grenzwerte der Integrale und Summen.

In der allgemeinen Formel der parabolischen Interpolation (s. Kap. IV) werden die Koeffizienten durch die Summen

$$\sum_i \psi_n(x_i) \,.\, \Theta^2(x_i) \,.\, F(x_i)$$

gebildet, und diese Summen sind, wenn wir $\Theta^2(x)$ durch eine Funktion $f(x)$ ersetzen, die immer positiv bleiben muss, offenbar linear zusammengesetzt mit Hilfe der Summen:

$$\sum_i x_i^0 f(x_i), \quad \sum_i x_i f(x_i), \quad \sum_i x_i^2 f(x_i) \ldots$$

Diese letzteren Summen zeigen eine grosse Analogie mit den Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$ ... Wie diese Ableitungen dazu dienen Polynome zu bilden, welche sich einer beliebigen Funktion im Bereiche eines Wertes $x = a$ möglichst nähern, so dienen fragliche Summen dazu, die Ausdrücke zu bilden, welche sich einer gegebenen Funktion in irgend einem Intervall möglichst nähern. In dem Falle, in welchem die Werte von x ein lineares Continuum bilden, lassen sich diese bemerkenswerten Summen auf die Integrale

$$\int f(x)dx, \quad \int xf(x)dx, \quad \int x^2 f(x)dx$$

zurückführen.

In einer Abhandlung vom Jahre 1873 [44] hat Tschebyschef ohne Beweis die Resultate angegeben, die er bezüglich der Grenzwerte des Integrals

$$\int_u^v f(x)dx$$

erhalten hat, wenn angenommen wird, dass die Werte der Integrale

$$1) \qquad \int_a^b x^k f(x)dx = A_k, \quad (k = 0, 1, \ldots n-1)$$

für die grösseren Intervalle $(a < u,\ b > v)$ gegeben sind und dass die Funktion $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ positiv bleibt. Wenn z. B. die Zahl dieser bekannten Integrale gerade ist $(n = 2m)$, so können die Grenzwerte des Integrals

$$\int_u^v f(x)dx$$

nur in dem Falle erhalten werden, wo u und v einer gewissen Gleichung genügen, die von den bekannten Werten der Integrale (1) abhängt.

Um diese Gleichung, sowie die Grenzwerte des Integrals

$$\int_u^v f(x)dx$$

zu erhalten, wo u und v der eben angeführten Gleichung genügen müssen, entwickelt man das Integral

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{z-x}$$

in eine nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihe. Bis auf die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{x^{2m}}$ hat man:

$$\int_b^a \frac{f(x)dx}{z-x} = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \cdots \frac{A_{2m-1}}{z^{2m}};$$

andererseits dient, wenn man den rationalen Bruch:

$$\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \cdots \frac{A_{2m-1}}{z^{2m}}$$

in einen Kettenbruch verwandelt, dieser dazu, die Gleichung zu bestimmen, welcher durch die Werte u und v und die entsprechenden Grenzwerte des Integrals

$$\int_u^v f(x)dx$$

genügt wird.

Sei $\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}$ der m^{te} Näherungsbruch des Kettenbruchs; dann sind u und v die Wurzeln z_l und z_n der Gleichung $\psi_m(z) = 0$ und die Grenzen der Integralwerte

$$\int_{z_l}^{z_n} f(x)dx$$

sind gleich den Integralresiduen

$$\left[\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}\right]_{z_l+\omega}^{z_n-\omega} \quad \text{und} \quad \left[\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}\right]_{z_l-\omega}^{z_n+\omega},$$

wo ω eine unendlich kleine positive Grösse bezeichnet. Diese Formeln sind aus allgemeineren auf das Integral

$$\int_a^v f(x)dx$$

bezüglichen Formeln entnommen, wo v irgend ein zwischen a und b liegender Wert ist. Für die Grenzwerte dieser Integrale hat man folgende Formeln:

2)
$$\begin{cases} \int_a^v f(x)dx \leqq [F(z)]_{a-\omega}^{v+\omega} \\ \int_a^v f(x)dx \geqq [F(z)]_{a-\omega}^{v-\omega} \end{cases}$$

wo $F(z)$ ein rationaler Bruch

$$\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} = \frac{\varphi_m(z) \cdot Z - \varphi_{m-1}(z)}{\psi_m(z) \cdot Z - \psi_{m-1}(z)}$$

ist, in welchem Z eine gewisse Funktion vom ersten Grade in z bedeutet, deren Ausdruck in Funktion von v einfacher sich gestaltet, wenn n gerade als wenn n ungerade ist.

Die Formeln 2) lassen sich leicht auf die Form bringen:

$$3)\quad \begin{cases} \int_a^v f(x)dx \leqq \left[\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}\right]_{a-\omega}^{v} + \frac{1}{2}\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)} \\ \int_a^v f(x)dx \geqq \left[\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}\right]_{a-\omega}^{v} - \frac{1}{2}\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)}, \end{cases}$$

aus welcher zu erkennen ist, dass das Integralresiduum

$$\left[\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}\right]_{a-\omega}^{v}$$

den Näherungswert des Integrals

$$\int_a^v f(x)\,dx$$

mit einem Fehler liefert, welcher den numerischen Wert von $\frac{1}{2}\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)}$ nicht übersteigt. Infolgedessen kann, wenn die Integrale 1) für zwei Funktionen $f(x)$ und $f_1(x)$ zusammenfallen, die Differenz zwischen den beiden Integralen

$$\int_a^v f(x)dx \quad \text{und} \quad \int_a^v f_1(x)dx$$

den Wert $\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)}$ nicht übersteigen. Auf Grund der Fundamentalformeln der Theorie der Kettenbrüche (s. Kap. IV) weist Tschebyschef nach [70], dass in dem betrachteten Fall

$$4)\quad \frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)} = \frac{1}{\alpha_1\psi_0^2(v) + \cdots + \alpha_m\psi_{m-1}^2(v) + \gamma\,\psi_m^2(v)}$$

ist.

Als Beispiel erörtert er den Fall

$$a = -\infty, \quad b = +\infty, \quad f_1(x) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{q^2x^2}{2}}.$$

Unter dieser Annahme hat man:

$$5)\quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)\,dx = 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)\,dx = \frac{1}{q^2}, \ \ldots\ldots \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} f_1(x)\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-3)}{q^{2m-2}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f_1(x)\,dx = 0. \end{cases}$$

Wenn also die einer andern Funktion $f(x)$ entsprechenden Integrale gleiche Werte haben, so wird die Differenz zwischen den Integralen

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{v} f_1(x)\,dx$$

durch die Formel 4) ausgedrückt sein, wobei dann die Funktionen $\psi_l(z)$ die Polynome von Hermite sein werden. In diesem Fall kann man leicht für ein beliebiges v die obere Grenze des zweiten Gliedes der Formel 4) bestimmen; es genügt, die untere Grenze der Summe

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i = \sum_{i=0}^{i=m-1} \frac{\psi_i^{\,2}(v)}{\Gamma(i+1)\,q^{2i}}$$

auszuwerten.

Eine bemerkenswerte Analyse ergiebt die Lösung der gestellten Aufgabe. Da:

$$\sum_{0}^{\infty} T_l t^l = \Theta(t) = \frac{e^{\frac{q^2 v^2 t}{1+t}}}{\sqrt{1-t^2}},$$

so handelt es sich darum, die Summe $\sum_{0}^{m-1} T_l$ nach dem bekannten Wert der Funktion

$$\sum_{0}^{\infty} T_l t^l = \Theta(t)$$

zu bestimmen. Man braucht nur den Wert des Integrals

$$\int_{0}^{m-1} Y t^x\,dx$$

mit Hilfe der bekannten Werte der Integrale

$$\int_{0}^{\infty} Y t^x\,dx, \quad \int_{0}^{\infty} x\,Y t^x\,dx, \quad \int_{0}^{\infty} x^2\,Y t^x\,dx$$

aufzusuchen, wozu man mittelst der allgemeinen Theorie der Grenzwerte der Integrale gelangt. Für die untere Grenze der Summe

$$T_0 + T_1 + \cdots T_{m-1}$$

findet Tschebyschef den Ausdruck

$$M = \frac{2(m-3)^3\sqrt{m-1}}{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{3/2}} \cdot \frac{1}{(q^2v^2+1)^3}.$$ *

* Herr Sonine hat diese Grenze durch eine andere

$$\sqrt{\frac{2m-1}{\pi}}$$

ersetzt, die viel einfacher und überdies unabhängig von v ist. (Sur l'exactitude de la détermination des valeurs limites des intégrales. Mém. de l'Académie de St. Pétersbourg. 1892.)

Aus allem bisher Gesagten folgt nachstehender Satz: „Wenn für eine Funktion $f(x)$, die immer positiv bleibt, die Gleichungen 5) gelten, so bleibt der Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)\,dx$$

zwischen den Grenzen:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{2}} e^{-x^2}\,dx \mp \frac{1}{M}.“$$

Wir werden im folgenden Kapitel eine wichtige Anwendung dieses Satzes auf einen der Fundamentalsätze der Theorie der Wahrscheinlichkeiten kennen lernen.

Wir bemerken noch, dass ein analoges Problem, wie das, die Grenze der Summe

$$\sum_{0}^{m-1} T_i$$

mit Hilfe des Wertes der Summe

$$\sum_{0}^{\infty} T_i t^i$$

zu finden, in der Arbeit [69] behandelt worden ist. Hierin handelt es sich um die Bestimmung der Grenzen, zwischen welchen die Summe irgend einer Anzahl aufeinanderfolgender Koeffizienten der Reihe:

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

oder der Reihe:

$$\frac{B_1}{1^x} + \frac{B_2}{2^x} + \frac{B_3}{3^x} + \cdots$$

sich bewegt, mit Hilfe der bekannten Werte dieser Reihen, wobei alle Glieder positiv angenommen sind. Die Aufgabe lässt sich darauf zurückführen, die Grenzwerte des Integrals

$$\int_{0}^{u} F(z)\,dz$$

zu finden, wobei angenommen wird, dass $F(z)$ eine Funktion ist, die für $z > 0$ nicht negativ wird, und dass der Wert des Integrals

$$\int_{0}^{\infty} e^{-tz} F(z)\,dz$$

bekannt ist.*

* Die Formeln von Tschebyschef wurden von Herrn Sonine bewiesen und durch andere ersetzt. (Une remarque relative à la lettre de P. L. Tschebyschef à Mme Kovalevsky. Bulletin de l'Acad. de St. Pétersbourg. 1895.)

Die angeführten Resultate der Theorie der Grenzwerte wurden von Tschebyschef, wie schon erwähnt, 1873 ohne jeden Beweis angegeben. Er hat sich damit begnügt, ein interessantes Beispiel von Problemen hinzuzufügen, die man mit Hilfe seiner Formeln auflösen kann, nämlich: „Gegeben Länge, Gewicht, Lage des Schwerpunktes und Trägheitsmoment einer materiellen Geraden mit unbekannter, von Punkt zu Punkt wechselnder Dichte. Es sind die Grenzwerte aufzufinden, die sich dem Gewicht eines Stücks dieser Geraden am meisten nähern." Herrn Markof verdankt man den ersten Beweis der Formeln von Tschebyschef, die selbst für den Fall des Integrals

$$\int_u^v \Omega(x) f(x)\, dx$$

verallgemeinert sind. Nach der Veröffentlichung der Arbeit von Herrn Markof* veröffentlichte Tschebyschef in zwei Abhandlungen [68, 70] die Einzelresultate seiner Untersuchungen mit ihrer Anwendung auf den Fall, wo eine der Funktionen die Form hat:

$$\frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2 x^2}{2}}.$$

Wir haben diese Resultate teilweise angegeben. Was die Methode betrifft, welche Tschebyschef auf seine Resultate führte, so veröffentlichte er dieselbe erst später 1891 in der Abhandlung [79]. Tschebyschef betrachtet darin folgende Summen:

$$\sum_i x_i^k f(x_i),$$

die aus den Produkten der positiven Werte $f(x_0)$, $f(x_1)$ ... und den Potenzen der reellen Grössen x_0, x_1 ... zusammengesetzt sind. Diese

* „Über einige Anwendungen der algebraischen Kettenbrüche." St. Petersburg 1884 (Russisch). Herr Possé hat den Übergang von den Markof'schen auf die Tschebyschef'schen Formeln beleuchtet in seiner Monographie: „Über einige Anwendungen der algebraischen Kettenbrüche." St. Petersburg 1886. Neuerdings hat Herr Markof seine Untersuchungen über ähnliche Probleme, wie das von Tschebyschef, in der Abhandlung: Nouvelles applications des fractions continues (Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, série VIII, vol. 3, 1896) veröffentlicht. Das Problem von Tschebyschef wird verallgemeinert, wenn man annimmt, dass die Funktion $f(x)$ den zwei Ungleichungen:

$$L > f(x) > 0$$

genügt. Siehe auch vom gleichen Verfasser: „Sur une question de minimum proposée par M. Tschebyschef" (Acta mathem. Band VIII S. 57) und: „Sur les valeurs limites des intégrales en leur rapport avec l'interpolation." 1898.

Summen können als Spezialfälle der allgemeineren Summen $\sum_i z_i^k u_i$ betrachtet werden, wo einige der Quadrate u_i^2 gleich Null werden können. Für diese Summen löste Tschebyschef das Problem, das Maximum (oder Minimum) der Summe

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_q^2$$

oder der Summe:

$$u_{q_1}^2 + u_{q_1+1}^2 + \cdots + u_{p-1}^2 (q, q_1 < p)$$

zu finden, wenn für die $2p$ Variabeln

$$z_0, z_1, z_2, \ldots z_{p-1},$$
$$u_0, u_1, u_2, \ldots u_{p-1}$$

folgende Bedingungsgleichungen gegeben sind:

$$\sum_0^p z_i^0 u_i^2 = C_0, \quad \sum_0^p z_i u_i^2 = C_1, \ldots, \quad \sum_0^p z_i^{l-1} u_i^2 = C_{l-1}.$$

Auf Grund der Entwickelung des Ausdrucks:

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \cdots \frac{C_{l-1}}{x^l}$$

in einen Kettenbruch findet man das Wertesystem $z_0, z_1, \ldots z_{p-1}$, welches dem Maximum oder Minimum entspricht, und es lassen sich mit Hilfe der Integralresiduen sodann die entsprechenden Summen ausdrücken.

Eine Verallgemeinerung der Aufgabe, die in der Abhandlung [74] betrachtet wurde, bildet den Gegenstand der letzten Veröffentlichung [77] des hervorragenden Gelehrten. Er nimmt in derselben die Summen

$$\sum_0^p z_i^0 u_i^2, \quad \sum_0^p z_i u_i^2, \ldots$$

als nicht vollständig bekannt an, setzt jedoch voraus, dass man nur die genügend engen Grenzen, zwischen welchen sie eingeschlossen sind, kenne. Die Lösung dieser allgemeinen Aufgabe beruht auf den Resultaten der Abhandlung [75], worin Tschebyschef die Aufgabe der Bestimmung der Näherungsbrüche für die Entwickelung einer Reihe

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \cdots$$

in einen Kettenbruch auf die analoge Aufgabe bezüglich der Reihe

$$\frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \cdots$$

zurückgeführt hatte, wobei c_0, c_1 ... mehr oder weniger von den Grössen C_0, C_1 ... abweichen.

VII.

Theorie der Wahrscheinlichkeiten.

Nach den Untersuchungen bezüglich der Aufgaben über Minima und der Näherungsausdrücke der Funktionen ist die Theorie der Wahrscheinlichkeiten ein Lieblingsgegenstand des grossen russischen Mathematikers gewesen. Wir haben (im 1. Kapitel) gesehen, dass eine seiner ersten Arbeiten ein Versuch elementarer Analyse der Theorie der Wahrscheinlichkeiten war [3]. „Die Theorie der Wahrscheinlichkeiten", sagt er im Vorwort zu diesem Werk, „bildet bis jetzt einen der interessantesten und zugleich schwierigsten Zweige der transcendenten Analysis ... Beginnend mit den Gleichungen, welche die Unbekannten bestimmen, und endigend mit der Berechnung der numerischen Werte, finden wir überall die höchste transcendente Analysis. Wenn wir indessen die Probleme der Theorie der Wahrscheinlichkeiten genauer ins Auge fassen, so können wir uns überzeugen, dass es möglich ist, ausser der Methode der transcendenten Analysis auch noch eine andere nur auf den Prinzipien der Algebra fussende anzuwenden." In der That wendet Tschebyschef in seinem Versuch für den Beweis des Satzes von Bernoulli nur die Reihe an, welche $\log(1+x)$ darstellt. Er entwickelt zwei Beweise des Satzes. Der erste giebt sogar den Ausdruck für den Wert der Wahrscheinlichkeit, dass die Differenz zwischen dem Verhältnis der Anzahl des Eintreffens des Ereignisses zur Gesamtzahl der Fälle und der Wahrscheinlichkeit (Chance) des Ereignisses eine gewisse Grenze E nicht überschreite; das gewöhnlich angewandte Integral ist jedoch bei Tschebyschef durch die Summe der in genügend grosser Anzahl genommenen Werte der Funktion e^{-t^2} ersetzt. Der zweite noch mehr elementare Beweis giebt zwar den Ausdruck der eben erwähnten Wahrscheinlichkeit nicht, zeigt aber, dass, wie klein auch E sei, jene der Einheit sich nähert, wenn die Gesamtzahl der Fälle unbestimmt zunimmt. Das Prinzip dieses zweiten Beweises wendet Tschebyschef in einem 1846 in dem Journal von Crelle [4] veröffentlichten Aufsatz an, um einen allgemeineren als den Bernoullischen Satz bezüglich des Falles, wo die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sich von Versuch zu Versuch ändert, zu beweisen. Der Beweis, den Poisson für diesen von ihm „Gesetz der grossen

Zahlen"* genannten Satz gegeben hatte, hatte Tschebyschef nicht befriedigt, da er folgenden Einwand machte: „Wie geistvoll die durch den berühmten Mathematiker angewandte Methode auch sein mag, so bleibt es doch unmöglich, die Fehlergrenze zu zeigen, welche seine Näherungsanalyse zulässt. Wegen dieser Unsicherheit des Fehlerwertes ist seine Beweisführung nicht streng." In seiner Beweisführung wendet Tschebyschef nur die elementarsten Betrachtungen an, nämlich die Reihe für $\log(1+x)$ und den Näherungsausdruck für das Produkt $1 \cdot 2 \cdots x$.

Ebenso wenig, wie die Analyse von Poisson, konnte einen wissenschaftlich so strengen Denker wie Tschebyschef** die Analyse befriedigen, die durch Laplace in demjenigen Kapitel seiner Théorie analytique des probabilités entwickelt wurde, welches über die Wahrscheinlichkeit der Fehler der Mittelwerte einer grossen Anzahl von Beobachtungen und über die vorteilhaftesten Mittelwerte handelt. Die Analyse, die Laplace angewandt hatte, um zu beweisen, dass die Methode der kleinsten Quadrate für den Fall einer grossen Anzahl von Beobachtungen die vorteilhafteste sei, wie auch immer das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler laute, hat, wie Bienaymé mit Recht*** gesagt hat, eine viel grössere Tragweite; die Theorie der Fehler ist thatsächlich nur ein spezieller Fall der Theorie der beliebigen zufälligen Werte. Auf Grund des Fundamentalsatzes dieser letzteren Theorie strebt das arithmetische Mittel der Werte irgend eines Ereignisses, wenn die Zahl der Versuche unbestimmt zunimmt, mit einer der Sicherheit sich nähernden Wahrscheinlichkeit einem konstanten Wert zu. Tschebyschef gab zwei Beweise dieses Satzes, den Poisson als den zweiten Teil des Gesetzes

---

* Recherches sur la probabilité des jugements, chap. IV.

** Mehrere andere Autoren haben über die Strenge der Analyse von Laplace Zweifel laut werden lassen, z. B. Leslie Ellis (s. Todhunter, History of the mathematical Theory of Probability, Cambridge 1865, p. 561) und Glaisher. Dieser letztere drückt sich folgendermassen aus: „It is well known that all the proofs that have been given of the method of Least Squares contain, to say the least, some points of difficulty, and on this account any new investigations of the result is necessarily a matter of much interest". (Mem. of. R. Astron. Society, vol. 39, 1871.)

*** Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés (Journal de Liouville, série 2e, t. XII, 1867, p. 160).

der grossen Zahlen bezeichnet hatte und welchem Tschebyschef den Namen „Satz der Mittelwerte“ gab. Ein ganz elementarer unter diesen Beweisen bestärkt die ganz richtige Ansicht von Bienaymé,* dass, wenn man sich darauf beschränken will, die Methode der kleinsten Quadrate, soweit sie die Kombination von Beobachtungen berührt, darzuthun, ohne die Grösse des Fehlers zu berechnen, indem man nur zeigt, dass der Fehler bei dieser Methode ein Minimum wird, keine transcendente Analysis und nicht einmal besondere geistige Anstrengung notwendig sei. Thatsächlich genügen Tschebyschef sehr einfache algebraische Transformationen, um den Satz zu beweisen, den er folgendermassen ausspricht: „Wenn die mathematischen Hoffnungen der Grössen u_1, u_2, u_3 ... und ihrer Quadrate u_1^2, u_2^2, u_3^2 ... irgend eine endliche Grenze nicht überschreiten, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass die Differenz zwischen dem arithmetischen Mittel einer Anzahl N dieser Grössen und dem arithmetischen Mittel ihrer mathematischen Hoffnungen kleiner als eine gegebene Grösse werde, gleich 1, wenn N unendlich wird“ [34]. Das Gesetz der grossen Zahlen und der Satz von Bernoulli bezüglich der Wiederholung der Ereignisse sind einfache Folgerungen aus diesem Satz; man erhält sie unter der Annahme, dass jede der Grössen u_i nur zwei Werte zulassen kann: die Einheit und die Null.

Der elementare durch Tschebyschef gegebene Beweis genügte, um den Einfluss der grossen Zahlen aufzudecken. Aber die numerischen Berechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, wo es sich darum handelt, die Genauigkeit der nach dieser Methode gefundenen Zahlen abzuschätzen, erfordere etwas anderes; diese Berechnungen gründen sich auf die Möglichkeit, das Gesetz der Wahrscheinlichkeiten der Fehler durch die Funktion

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 x^2}$$

auszudrücken, welche, wie Gauss gefunden hat, eine Folge seiner Forderung des arithmetischen Mittels ist.

Die Betrachtung von Laplace bezweckt zu beweisen, dass für eine grosse Zahl von Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit der Fehler, wie auch ihr Gesetz heissen möge, durch eine Funktion von der angegebenen Form dargestellt werden kann. Tschebyschef hat in seiner allgemeineren Theorie der beliebigen zufälligen Werte die durch

* Loc. cit. p. 16.

Laplace gegebene Analyse* durch eine andere auf der Theorie der Grenzwerte der Integrale beruhende ersetzt.

Nehmen wir an, dass wir die zufälligen Werte $u_1, u_2 \ldots$ haben, für welche die mathematischen Hoffnungen gleich Null sind, während die mathematischen Hoffnungen aller ihrer Potenzen eine bestimmte endliche Grenze nicht überschreiten. Dann giebt eine der von Laplace und Bienaymé** analoge Untersuchung folgendes Resultat: „Bezeichnet man mit $f(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

$$\frac{u_1 + u_2 + \cdots u_n}{\sqrt{n}}$$

zwischen den Grenzen x und $x + dx$ einbegriffen sei, so hat man für $n = \infty$, welche auch immer die Gesetze für die Wahrscheinlichkeit der möglichen Werte u_i seien, folgende bis auf Potenzen $(2m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung einer willkürlichen Grösse s richtige Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x)dx = e^{\frac{s^2}{2q^2}}, \quad \text{wo } \frac{1}{q^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} a_i^{(2)},$$

wobei $a_i^{(2)}$ die mathematische Hoffnung des Quadrats des Wertes u_i bezeichnet."

Nach dieser Gleichung fallen die Werte der Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx (k = 0, 1, \ldots, 2m-1)$$

mit den entsprechenden Integralen für die Funktion

$$f(x) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2 x^2}{2}}$$

zusammen. Dieses Resultat gestattet die Anwendung des in Kapitel V erwähnten Satzes, nach welchem für $n = \infty$ und für beliebiges m der Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)dx$$

durch den Wert des Integrals

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx$$

ersetzt werden kann, und zwar mit einem Fehler, der den numerischen Wert von $\frac{1}{M}$ nicht übersteigt. Aber $\frac{1}{M}$ nähert sich für m gleich Un-

* Théorie analytique des probabilités. Livre II, chap. 7.

** Mémoire sur la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres carrés. (Mém. des savants étrangers t. XV, 1858.)

endlich der Null, sei es dass wir den von Tschebyschef oder den von Herrn Sonine angegebenen Ausdruck benützen; somit erhält man leicht folgendes Resultat:

„Für $n = \infty$ stellt das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t'} e^{-t^2} dt$$

die Wahrscheinlichkeit dar, dass

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{i=n} u_i$$

zwischen den Grenzen $\frac{\sqrt{2}}{q} t$ und $\frac{\sqrt{2}}{q} t'$ bleibt, d. h. kraft der Beziehung

$$\frac{1}{q^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} a_i^{(2)}$$

dafür, dass $\sum u_i$ zwischen den Grenzen

$$t\sqrt{2\Sigma_i a_i^{(2)}} \quad \text{und} \quad t'\sqrt{2\Sigma a_i^{(2)}}\,*$$

bleibt."

Die Untersuchung, mit Hilfe derer Tschebyschef zu diesem Satz kommt, der als Grundlage für die Methode der kleinsten Quadrate dienen kann, bleibt immer eine seiner schönsten und ruhmvollsten Leistungen.**

VIII.

Reihe von Lagrange. Angewandte Mechanik. Geometrie der Oberflächen (Deformation der ebenen Netze). Tschebyschefs Mechanismen.

Die vorhergehenden Kapitel waren den wichtigsten analytischen Arbeiten des berühmten Gelehrten gewidmet. Es bleibt uns noch

---

* Nach dem ersten Beweis des Satzes von den Mittelwerten [34] ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $\sum u_i$ zwischen den Grenzen $\pm \alpha\sqrt{\Sigma a_i^{(2)}}$ sich bewege, grösser als $1 - \frac{1}{\alpha^2}$.

** Herr Markof hat in zwei neulich erschienenen Abhandlungen: Das Gesetz der grossen Zahlen und die Methode der kleinsten Quadrate (Bullet. de la Société Physico-mathém. de Kasan. Série 2 Bd. VIII) und: Sur les racines de l'équation

$$e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$$

(Bullet. de l'Acad. des Sc. de St. Pétersb. Série V. tome IX) die Analyse von Tschebyschef durch eine andere strenger durchgeführte ersetzt.

übrig, einige andere Untersuchungen aus dem Bereich der Analysis anzuführen, die sich nicht leicht an die Arbeiten anschliessen lassen, die bisher besprochen wurden.

Hierher gehört z. B. eine Abhandlung über die Reihe von Lagrange [19], wo Tschebyschef eine allgemeine Formel der Integration per partes anwendet*, um daraus die Reihe von Lagrange mit ihrem Ergänzungsgliede abzuleiten. Indem er den Wert dieses Ergänzungsgliedes auf die Entwickelungen der excentrischen Anomalie und des Radiusvektors nach steigenden Potenzen der Excentricität anwandte, fand Tschebyschef, dass diese Entwickelungen immer konvergent sind, wenn der Wert der Excentricität kleiner als die Grenze $k = 0{,}66274$ ist. Dies hatte Laplace zuerst gefunden und Cauchy hatte es mit einer allgemeineren Methode bewiesen. Tschebyschef fand jedoch überdies, dass in diesen Entwickelungen der Fehler immer kleiner ist als das Verhältnis der Excentricität zu 0,66274 auf die sovielte Potenz erhoben, als die Anzahl der behaltenen Glieder der Reihe angiebt. Wir werden auch eine Arbeit [50] angeben, in welcher Tschebyschef die bemerkenswerte Formel von Catalan

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{2n}$$

verallgemeinert, indem er die Zähler durch die Glieder irgend einer Reihe ersetzt, was als Resultat einen Ausdruck für die Konstante $4a \log 2 - \frac{\pi^2}{6}$ in den Funktionen $E(a), E(2a), E(3a) \ldots$ giebt, wobei $E(x)$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl bedeutet. Fügen wir noch hinzu, dass Herr Hermite in seinem Cours einen interessanten Satz von Tschebyschef über den arithmetischen Charakter der rationalen Koeffizienten von Reihen anführt, die aus einer aus algebraischen, logarithmischen und Exponentialfunktionen in endlicher Zahl zusammengesetzten Funktion sich ergeben [79].

Gehen wir jetzt zu einer Reihe von Arbeiten über, in welchen die allgemeinen, in den vorhergehenden Kapiteln auseinandergesetzten analytischen Methoden auf Fragen der industriellen Mechanik angewandt sind. Wir haben bereits erwähnt, dass Tschebyschef von Jugend auf ein grosses Interesse für die Anwendungen der Mechanik an den Tag legte. Diese Neigung erwachte von neuem, als er 1849—1851

* Diese Formel wurde auch durch Herrn Bertrand gefunden. (Journ. de Liouville, t. VIII, 1843.) Siehe dessen Calcul intégral, p. 10.

industrielle Mechanik an der Universität in St. Petersburg und am Kaiserlichen Lyceum Alexander I. vortrug. Im Jahre 1852 machte er eine Reise, deren Hauptzweck, wie es aus einem interessanten Bericht [78] hervorgeht, darin bestand, seine Kenntnisse in angewandter Mechanik zu erweitern, indem er Industriecentren besuchte. Das Conservatoire des Arts et Métiers in Paris, die Eisenbahn von Paris nach St. Germain, die Berg- und Hüttenwerke in Lothringen, die Papierfabriken von Angoulème mit ihren Turbinen, die Windmühlen von Lille und die Waffenfabriken in Châtellerault fesselten den jungen russischen Professor in hohem Maße. Was er jedoch besonders suchte, das waren die nötigen Daten für seine Untersuchungen über die Theorie der Watt'schen Parallelogramme. Er verfolgte dasselbe Ziel in England, wo er die von Watt selbst erbauten Maschinen in Augenschein nehmen konnte. Nach diesen Reisen veröffentlichte er seine erste Abhandlung über die Theorie der Parallelogramme, über welche wir im II. Kapitel gesprochen haben.

Seine mehrmals wiederaufgenommenen Studien über das Watt'sche Parallelogramm führten Tschebyschef auf die allgemeine Betrachtung der Gelenkmechanismen. Unter Tschebyschefs Einfluss entdeckte im Jahre 1871 ein junger talentvoller Mann, Herr Lipkin, die Lösung des Problems der genauen Geradführung eines Punktes wieder, welche von Peaucellier im Jahre 1864 gegeben worden war. Die schönen Entdeckungen von Peaucellier und Lipkin, sowie die Arbeiten von Tschebyschef über die angenäherte Führung mittelst Gelenkmechanismen zogen die Aufmerksamkeit verschiedener hervorragender Mathematiker* auf sich. Übrigens nahm Tschebyschef während seines ganzen Lebens regen Anteil an den Gelenkmechanismen; allein der Kurbelmechanismus ist Gegenstand mehrerer Arbeiten gewesen [37, 52, 56, 57, 58]. Mit Hilfe der Gelenkmechanismen verwirklichte Tschebyschef die Bewegung parallel zu einer Ebene in seiner Laufmaschine [91] und in einigen anderen Mechanismen; die Gelenkmechanismen können, wie er in der Abhandlung [67] gezeigt hat, eine rotierende Bewegung in eine Kreis- oder geradlinige Bewegung umsetzen; endlich

* V. Liguine, Liste de travaux sur les systèmes articulés. (Bulletin de M. Darboux, 2e série, t. VII, p. 145—160.) Die Geschichte und Entwickelung der Frage der Gelenkmechanismen finden sich in den Leçons de cinématique von Herrn Koenigs (Paris 1897) chap. XI.

beruht das von Tschebyschef erfundene Instrument zum Aufzeichnen von Kreisbögen mit grossem Radius [86] auf demselben Prinzip.

Mit dem Studium der Gelenkmechanismen ist ebenfalls eng verbunden ein Problem über die Geometrie der Oberflächen, das durch Tschebyschef gestellt wurde und uns eine grosse Zukunft zu haben scheint* [53]. Die Gelenkmechanismen sind zusammengesetzt aus starren Stäben, die einer Bewegung in derselben Ebene dergestalt unterworfen sind, dass die von ihnen gebildeten Winkel sich verändern können. Zwischen dieser Theorie der Gelenkmechanismen und derjenigen der Deformation der Netze oder (gemäss dem Ausdruck von Tschebyschef) des „Kleiderschnittes" besteht eine augenscheinliche Analogie. In der That verändert sich bei jeder Deformation eines Gewebes, das aus zwei sich rechtwinklig schneidenden Fadensystemen besteht, der Schnittpunkt zweier Fäden nicht, und es bleiben die Längen der Fäden dieselben. Es ändert sich nur der Winkel dieser Fäden. Es handelt sich folglich bei dieser Aufgabe darum, mittelst geeigneter Wahl der Koordinatenlinien das Linienelement der vorliegenden Oberfläche auf die Form

$$du^2 + dv^2 + 2du\,.\,dv\cos\alpha$$

zu bringen, wo α irgend eine Funktion von u und v ist. Ausgehend von bestimmten Annahmen über die Beschaffenheit der Gewebe, giebt Tschebyschef Formeln an, welche gestatten, die Umfänge von zwei, drei oder vier Stücken Tuch so zu bestimmen, dass man möglichst genau die Oberfläche einer Kugel bedecken kann, um sie zu „bekleiden", nach dem Ausdruck Tschebyschefs.**

Doch interessierten Tschebyschef nicht die Gelenkmechanismen allein. Die Untersuchungen über die Funktionen, die sich am wenigsten von Null entfernen, die er angesichts der Theorie der Parallelogramme anstellte, fanden auch ihre Anwendung in der Aufgabe über den Centrifugalregulator. Bekanntlich hat dieser Regulator den Zweck, die Abweichungen von der mittleren Geschwindigkeit zu begrenzen, wenn die

---

* Es hat den Anschein, als ob die interessanten Arbeiten von E. Lucas über die Geometrie der Gewebe nicht ohne Einfluss auf das von Tschebyschef gestellte Problem gewesen seien.

** G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces. Troisième partie, p. 133. Siehe auch: Darboux, Considérations sur les équations différentielles qui se rapportent à la déformation des surfaces. (Ass. Franç. pour l'avanc. des sciences, congrès de Paris.)

Arbeit Unregelmässigkeiten unterworfen ist; zu diesem Zweck muss das Verhältnis der Geschwindigkeiten, die den durch die Kugelstangen und die Vertikalaxe gebildeten Winkeln entsprechen, sich möglichst der Einheit nähern, was erkennen lässt, auf welche Weise die Theorie der möglichst wenig von Null abweichenden Funktionen in diese Frage eingeführt wird.*

Tschebyschef hat nicht nur mathematische Methoden von der grössten Wichtigkeit für die Theorie der Mechanismen aufgefunden und sie dazu verwendet, um a priori die Dimensionen ihrer Teile zu berechnen, sondern auch, von Jugend auf für mechanische Arbeiten eingenommen, wie dies bei Newton und Watt der Fall war, seine erfinderische Begabung auf die Schaffung einiger durchaus neuer Maschinen verwendet. Die arithmetische Maschine mit stetiger Bewegung, von der sich ein Exemplar im Conservatoire des Arts et Métiers in Paris befindet, sein Instrument zum Aufzeichnen von Kreisbögen mit grossem Halbmesser, das er zur Ausstellung in London 1876, und ebenso der Fahrrad-Stuhl, den er zur Ausstellung in Chicago schickte, werden immer Zeugnisse seiner Erfindungsgabe bleiben.

Zum Schluss dieses Kapitels geben wir hier das Verzeichnis der Tschebyschef zu verdankenden Mechanismen, die seit seinem Tode dem Museum für angewandte Mechanik an der Universität von St. Petersburg einverleibt sind;** zu gleicher Zeit sind die darauf bezüglichen Schriften angeführt:

1. Parallelogramm von Tschebyschef (Modell in Holz) [37].
2. Rechenmaschine zum Addieren und Subtrahieren [62, 81, 82].
3. Gelenkmechanismus zum Aufzeichnen von Kreisbögen mit grossem Radius [86].
4. Modell eines nach Pferdeart sich bewegenden Mechanismus [87].
5. Zwei Modelle von Mechanismen zur Überführung einer alternierenden Bewegung in eine fortgesetzt rotierende (Holzmodell).
6. Fahrrad-Stuhl.
7. Maschine zur Trennung der Körner mit Hilfe der Amplitude des Wurfes.

---

* Die ausführliche Theorie des isochronen Regulators von Tschebyschef findet sich in dem Werk des Herrn Résal, Traîté de Mécanique générale (Paris 1876), Band III, Seite 208.

** Wir verdanken diese Liste der Zuvorkommenheit des Konservators des Museums, Herrn Mestschersky.

8. Modell einer Presse von Holz, durch Tschebyschef selbst ausgeführt.
9. Centrifugalregulator mit konstanten Kugeln und Gegengewichten [41, 46].
10. Centrifugalregulator mit veränderlichen Kugeln und Gegengewichten [41, 46].
11. Sieben Modelle von Mechanismen der in [72] besprochenen Form.*

IX.

Allgemeine Betrachtungen über Tschebyschefs wissenschaftliche Leistungen.

Wir hoffen, dass dieser kurze Überblick über Tschebyschefs Wirken genügt, um einen Begriff des allgemeinen Charakters seiner gründlichen und originellen Untersuchungen zu geben.

Nachdem Tschebyschef sein Talent für die mathematische Forschung in einigen schwierigen Problemen der Zahlentheorie versucht hat, die für die reine Mathematik von hohem Wert sind, aber ohne praktische Anwendung bleiben, verlässt er diese Fragen und wendet, seinen natürlichen geistigen Neigungen folgend, seine ganze Thätigkeit der Entdeckung neuer mathematischer Methoden zu, die sich auf die Lösung praktischer Aufgaben beziehen. Auf diesem Gebiete arbeitet Tschebyschef bis zum Ende seines Lebens und seine Entdeckungen reihen ihn unter die originellsten mathematischen Genies unserer Epoche. Der durch ihn entdeckte Weg ist so fruchtbar, die Zahl der sich darbietenden Fragen so gross, dass Tschebyschef eine nationale Schule russischer Mathematiker gründen konnte, die durch die Richtung ihrer Arbeiten eine besondere Strömung in der Mathematik des 19. Jahrhunderts bildet.

Ebenso wie die Geschichte der Philosophie Epochen aufweist, wo nacheinander Idealismus und Empirie die Oberhand haben, so kann die reine Mathematik mit einem Pendel verglichen werden, das zwischen der Verallgemeinerung, der Abstraktion und der logischen Strenge der

* In einer 1895 an die physiko-mathematische Gesellschaft in Kasan gerichteten Mitteilung erwähnt Herr Koslof, der mit Tschebyschef in einer mechanischen Werkstätte in St. Petersburg zusammen arbeitete, noch einige Erfindungen des berühmten Gelehrten, nämlich einen sich parallel bewegenden Tisch, einen Balancier, einen Reflektor und ein Boot.

Prinzipien einerseits und dem Studium der konkreten und speziellen Probleme andererseits oscilliert. So ist die Epoche von Euler und Lagrange, worin der Grund für zahlreiche neue mathematische Methoden zur Lösung konkreter Aufgaben gelegt wurde, durch eine andere abgelöst worden, mit welcher die grossen Namen von Gauss und Cauchy eng verbunden sind und die in besonderem Grade durch die Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln gekennzeichnet ist. Die Bestrebungen dieser Epoche haben einen typischen Repräsentanten in Weierstrass gefunden, dessen sämtliche wissenschaftliche Arbeiten ausschliesslich der reinen Mathematik gewidmet sind und nur eine kurze Notiz über einen physikalischen Gegenstand enthalten.* Im Gegensatz zu Weierstrass sind die Arbeiten Tschebyschefs und seiner Schule charakterisiert durch das Bestreben, Methoden anzugeben, die auf praktische Fragen anwendbar sind. Die mathematische Physik und deren allgemeine Methoden bekümmerten übrigens Tschebyschef ebensowenig, wie der abstrakte Teil der reinen Mathematik. Den Bedürfnissen der angewandten Wissenschaften zu entsprechen, indem er ihnen mathematische Methoden lieferte, die über die Grenze der Genauigkeit, welche man in diesen Wissenschaften erreichen kann, nicht hinausgehen, darin bestand das fortwährende Streben Tschebyschefs.

Der Mechaniker, der Astronom, der Physiker interessieren sich grösstenteils nicht für abstrakte Untersuchungen über die Eigenschaften der Funktionen oder Zahlen, wenn es sich um endgiltige Lösung der sie beschäftigenden Aufgaben handelt; bei dieser endgiltigen Lösung, beim Übergang zu bestimmten Zahlen, werden transcendente Funktionen meistens der Bequemlichkeit der Rechnung halber durch ein Polynom oder einen rationalen Bruch ersetzt; die Praxis macht auch keinen Unterschied zwischen kommensurabler und inkommensurabler Zahl, Begriffe, die in der reinen Mathematik von so grosser Wichtigkeit sind. Man erkennt so bei der Auflösung aller praktischen Aufgaben und Anwendungen die Wichtigkeit der Methoden, welche Näherungswerte der Funktionen liefern und zugleich die Grenze des

---

* Diese Gedanken wurden in einem 1886 in dem Bulletin der physikomathemat. Gesellschaft von Kasan veröffentlichten Artikel unter dem Titel entwickelt: Über die Rolle von Professor Weierstrass in der modernen Entwickelung der Mathematik.

unvermeidlichen Fehlers* zu ermitteln gestatten. In der systematischen Entwickelung derartiger Methoden hat Tschebyschef weder einen Nebenbuhler noch einen Vorgänger gehabt, der mit ihm vergleichbar wäre. In dieser Beziehung kann man nur Poncelet anführen, der lineare Formeln angab, die mit grosser Annäherung die Quadratwurzel aus der Summe oder Differenz von Quadraten ersetzen.

In einer Unterhaltung, die ich mit Tschebyschef einige Jahre vor seinem Tode hatte, drückte er seine allgemeinen Ansichten über Zweck und Probleme der Mathematik ungefähr in folgenden Worten aus, in denen der Reiz, den seine geistvolle Unterhaltung immer bot, sich widerspiegelt: „Die Mathematik", sagte er zu mir, „hat schon zwei Perioden durchgemacht: In der ersten wurden die Probleme von den Göttern selbst gestellt (z. B. das Problem der Verdoppelung des Würfels), in der folgenden stellten Halbgötter wie Fermat, Pascal und andere diese Aufgaben. Heute sind wir in die dritte Periode eingetreten, wo die Bedürfnisse der Menschheit Fragen aufwerfen, welche der Lösung harren." In einem 1856 gehaltenen Vortrage über das Problem geographischer Karten hatte Tschebyschef dieselben Gedanken entwickelt [18]: „Die gegenseitige Annäherung von Theorie und praktischer Anwendung giebt die fruchtbarsten Resultate, aus welchen nicht nur die Praxis Nutzen zieht; unter ihrem Einfluss entwickelt sich auch die Wissenschaft selbst, indem diese Annäherung neue Gegenstände zum Studium oder neue Gesichtspunkte für bereits vorhandene Studiengegenstände liefert. Macht die Theorie grosse Fortschritte, wenn ältere Methoden neu entwickelt oder angewandt werden, so ist dieser Fortschritt noch grösser, wenn sie neue Methoden entdeckt; dann findet die Wissenschaft in den Anwendungen einen zuverlässigen Leitfaden. Die praktische Thätigkeit des Menschen bietet eine ausserordentliche Mannigfaltigkeit, welcher zu genügen der Wissenschaft eine grosse Anzahl von Methoden zur Verfügung stehen müssen. Von allen diesen Methoden sind jedoch die von besonderer Wichtigkeit, welche unentbehrlich sind, um die verschiedenen Modifikationen des diese ganze Thätigkeit beherrschenden Problems zu lösen: Wie muss man seine Mittel ausnützen, um den grösstmöglichen Vorteil zu erlangen?"

* Siehe über diesen Gegenstand die wichtigen neuerdings durch Herrn Klein ausgesprochenen Ideen. (Evanston Colloquium. 1894, S. 46 bis 50.) Ebenso Poincaré (discours de Zurich) und Laisant (La mathématique. 1898, S. 145).

Diesen allgemeinen Ansichten über den Zweck der Mathematik entsprechen die Hauptuntersuchungen Tschebyschefs: Aufgaben über Maxima und Minima, welche in ihrem Charakter vollständig von denen abweichen, die auf die Erfindung der Differentialrechnung und der Variationsrechnung führten, Aufsuchung von Näherungswerten für Zahlen, Funktionen und Integrale, Untersuchungen, die mit der Theorie der Kettenbrüche eng verbunden sind, endlich seine schönen Resultate im Gebiet der Theorie der Wahrscheinlichkeiten, einem der Lieblingsgegenstände Tschebyschefs, der diese Theorie als „die Grundlage aller auf Beobachtungen und Erfahrungen beruhenden Kenntnisse" betrachtete.

Zu Beginn des zur Neige gehenden Jahrhunderts stellte Napoleon dem Institut de France folgendes Programm: „Erstatten Sie mir Bericht über die Fortschritte der Wissenschaften seit 1789, über ihren gegenwärtigen Stand und nennen Sie mir die passenden Mittel, dieselben zu fördern." Wenn die internationalen Mathematikerkongresse, die durch den Kongress von Zürich eingeführt worden sind, sich bezüglich der modernen Mathematik dieses Programm stellen, welches dem Wunsche der Gelehrten aller Länder und einem dringenden wissenschaftlichen Bedürfnis entspricht, wenn sie solche Berichte veröffentlichen, so wird zweifellos dank Lobatschewsky, Ostrogradsky, Tschebyschef und seiner Schule die mathematische Wissenschaft Russlands einen Ehrenplatz dabei einnehmen.

Verzeichnis der Arbeiten von Tschebyschef.*

1. 1843. Note sur une classe d'intégrales définies multiples. Journal de Liouville, t. VIII.

2. 1844. Note sur la convergence de la série de Taylor. Journal von Crelle, Bd. 28.

3. 1845. Versuch einer elementaren Analyse der Theorie der Wahrscheinlichkeiten. These, Moskau (66 S., russisch).

4. 1846. Démonstration élémentaire d'une proposition générale de la théorie des probabilités. (Auszug aus der vorhergehenden Schrift.) Journal von Crelle, Bd. 33.

5. 1848. Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. Mém. des savants étrang. prés. à l'Acad. de St. Pétersbourg, t. VI. Journal de Liouville, t. 17, 1852. Anhang III zur „Theorie der Kongruenzen" [s. Nr. 6].

6. 1849. Theorie der Kongruenzen. St. Petersburg, 2. Ausgabe 1879 (russisch). — Theorie der Kongruenzen. Deutsch mit Autorisation des Verfassers herausgegeben von H. Schapira. Berlin, 1888. — Teorica delle congruenze. Traduzione italiana con aggiunte e note di Massarini. Roma, 1895.

7. 1849. „Index systématique et raisonné des oeuvres arithmétiques d'Euler" par M. M. Bouniakovsky et Tchébychef. Leonh. Euleri Commentationes arithmeticae collectae, vol. I.

8. 1850. Mémoire sur les nombres premiers. Mém. des sav. étrangers prés. à l'Acad. de St. Pétersbourg, t. VII. Journal de Liouville, t. XVII, 1852.

9. 1851. Sur les formes quadratiques. Journal de Liouville, t. XVI.

10. 1851. Note sur différentes séries. Ebenda.

11. 1853. Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes (I. Teil). — Mém. des sav. étr. prés. à l'Acad. de St. Pétersbourg, t. VII.

12. 1853. Sur l'intégration des différentielles irrationelles. Journal de Liouville, t. XVIII.

13. 1853. Lettre à M. Fuss sur un nouveau théorème relatif aux nombres premiers contenus dans les formules $4n+1$ et $4n+3$. Bulletin de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XI, 1853.

14. 1854. Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré. Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, IV. série, t. VI, 1857. Journal de Liouville, II série, t. II, 1857.

15. 1855. Über die Kettenbrüche (russisch). Mém. scientifiques de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. III. Journal de Liouville, II série, t. III, 1858.

---

* Diese Liste ist die Wiedergabe der von Herrn A. Liapunof, Professor an der Universität Charkov, verfassten und von den Herren Loria und Wassilief durchgesehenen und vervollständigten Liste.

16. 1855. Sur une formule d'Analyse. (Mitteilung an die Akademie vom 20. Oktober 1854.) Bulletin Phys.-Mathém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XIII. Mélanges Math. et Astron., t. II, livrais. 2 et 3. Journal von Crelle, Bd. 53.

17. 1856. Sur la construction des cartes géographiques. Bulletin Phys.-Math. de l'Acad. de St. Pétersb., t. XIV, Nr. 17. Mélanges Math. et Astr., t. II, livr. 5, 1857.

18. 1856. Über die Konstruktion der geographischen Karten. Abhandlung geschrieben für die feierliche Sitzung vom 8. Februar 1856 der Universität von St. Petersburg. (Russisch.)

19. 1857. Sur la série de Lagrange. Bulletin Phys.-Math. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XV, N. 19 et 20. Mélanges Math. et Astr., t. II, livr. 5. Journal de Liouville, série II, t. II (mit Übergehung des letzten Paragraphen).

20. 1857. Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions. Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, série IV, t. VIII, 1858. Sur les questions de minima etc. (Auszug aus der vorhergehenden Abhandlung.) Bulletin Phys.-Math. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XVI, N. 10. Mélanges Math. et Astr., t. II, livr. 6.

21. 1858. Sur une nouvelle série (Mitteilung vom 8. Oktober 1858). Bulletin Phys.-Math. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XVII, N. 16. Mélanges Math. et Astr., t. II, livr. 6, 1859.

22. 1858. Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données fournies par les observations. Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, série VII, t. I, 1859. Sur l'interpolation des valeurs fournies par les observations. (Auszug aus der vorhergehenden Abhandlung.) Bulletin Phys.-Math. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XVI, N. 23. Mélanges Math. et Astr., t. II, livr. 6.

23. 1859. Sur le développement des fonctions d'une seule variable. (Mitteilung vom 14. Oktober 1859.) Bulletin de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. I. Mélanges Math. et Astr., t. III, livr. 2.

24. 1859. Série de Tchébychef. (Auszug aus der vorhergehenden Abhandlung.) Nouv. Ann. de Math., t. XVIII, 1859.

25. 1859. Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrés. Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, série VII, t. I.

26. 1860. Sur l'intégration de la différentielle $\frac{(x+A)\,.\,dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}$. Bulletin de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. III. Mélanges Math. et Astr., t. II, livr. 3. Journal de Liouville, série II, t. IX, 1864.

27. 1860. Sur l'intégration des différentielles irrationelles. (Auszug aus der vorhergehenden Abhandlung.) Comptes rendus, t. LI. Journal de Liouville, II. série, t. IX.

28. 1861. Sur une modification du parallélogramme articulé de Watt. Bulletin de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. IV. Mélanges Math. et Astr., t. II, livr. 4.

29. 1864. Über die Interpolation. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. IV. (Anhang 5.)

30. 1865. Über die Integration der Differentiale, welche eine Kubikwurzel enthalten. (Russisch.) Ebenda, t. VII. (Anhang 5.)

31. 1866. Sur les fractions continues algébriques. (Brief an Braschmann.) Journal de Liouville, série II, t. X. — Über die Entwickelung der Funktionen in

U. OF ILL. LIB.

Reihen mit Hilfe der Kettenbrüche. (Brief an Braschmann, Russisch.) Mathemat. Sbornik, Band I.

32. 1866. Über die Entwickelung der Funktionen in Reihen mit Hilfe der Kettenbrüche. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. IX. (Anhang 1.)

33. 1866. Über eine arithmetische Frage. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. X. (Anhang 4.)

34. 1866. Über die Mittelwerte. (Russisch.) Mathem. Sbornik., Bd. II, 1867. Journal de Liouville, série II, t. XII, 1867.

35. 1867. Maxima und Minima der aus den Werten einer ganzen Funktion und ihrer Ableitungen zusammengesetzten Summen. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg t. XII. (3. Anhang.) Journal de Liouville, série II, t. XIII, 1869. (Übersetzung des Herrn von Khanikof.)

36. 1867. Über die Integration der einfachsten Differentiale unter denen, welche eine Kubikwurzel enthalten. (Russisch.) Mathem. Sbornik, Bd. II.

37. 1868. Über einen Mechanismus. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XIV.

38. 1869. Über die den Funktionen von Legendre ähnlichen Funktionen (Russisch.) Ebenda.

39. 1869. Über die Bestimmung der Funktionen nach den Werten, welche sie für gegebene Werte der Variabeln haben. (Russisch.) Mathem. Sbornik, Bd. IV.

40. 1870. Sur les parallelogrammes. Verhandlungen des 2. Kongresses der Russischen Naturforscher in Moskau.

41. 1871. Über den Centrifugalregulator. (Russisch.) Annuaire de l'Ecole Technique de Moscou. 1871.

42. 1872. Über die Zahnräder. (Russisch.) Ebenda.

43. 1873. Sur les quadratures. Journal de Liouville, série II, t. XIX 1873. Association française p. l'Avancement etc., Session de 1873. Les Mondes, journal redigé par Moigno, t. XXX. [Siehe 94.]

44. 1873. Sur les valeurs limites des intégrales. Journal de Liouville, série II, t. XIX. Assoc. franç. etc. Session de 1873.

45. 1873. Sur les fonctions qui diffèrent le moins possible de zéro. Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XX. (Anhang 1.) Journal de Liouville, série II, t. XIX.

46. 1873. Régulateur centrifuge. Les Mondes, t. XXXI. Ass. franç. etc. Session 1873.

47. 1875. Mémoires sur les engrenages. Cuyper, Revue universelle, t. 38.

48. 1875. Über die Interpolation der äquidistanten Werte. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XXV. (Anhang 5.)

49. 1875. Sur la limite du degré de la fonction entière qui satisfait à certaines conditions. Bulletin de la Soc. Math. de France, t. III.

50. 1876. Sur la généralisation d'une formule de M. Catalan et sur une formule arithmétique qui en résulte. Assoc. franç. etc. Session 1876. Nouv. Corréspondance mathém., t. II.

51. 1877. Über die in Beziehung auf zwei Polynome linearen Näherungsausdrücke. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XXX. (Anhang 4.)

52. 1878. Sur les parallélogrammes les plus simples symmétriques par rapport à un axe. Assoc. franç. etc. Session de Paris 1878.

53. 1878. Sur la coupe des vêtements. Ebenda.

54. 1878. Sur une transformation des séries numériques. Ebenda und Nouv. Correspondance mathém., t. IV.

55. 1878. Sur la résultante de deux forces appliquées à un seul point. Bulletin de la Société Mathém. de France, t. VI.

56. 1878. Über die einfachsten Gelenkmechanismen. (Russ.) Mathem. Sbornik. t. IX, 1879.

57. 1878. Über d. aus drei Elementen gebildeten u. in Bezug auf eine Axe symmetr. Parallelogramme. (Russ.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersb., t. XXXIV. (Anhang 3.)

58. 1879. Über die aus drei beliebigen Elementen gebildeten Parallelogramme. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XXXVI. (Anhang 3.)

59. 1880. Über die Functionen, welche wenig von Null abweichen für gegebene Werte der Variablen. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XL. (Anhang 3.)

60. 1881. Théorème relatif à la courbe de Watt. — Bulletin des Sciences Math. et Astr., série II, t. 5.

61. 1882. Über die einfachsten Parallelogramme, welche mit einer Annäherung vom vierten Grad eine geradlinige Bewegung geben. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XL.

62. 1882. Une machine arithmétique à mouvement contin. Revue scientifique, 2. sem., N. 13.

63. 1882. Über das Verhältnis zweier zwischen denselben Grenzen genommener Integrale. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XLIV. (Anhang 2.)

64. 1883. Über die Näherungsausdrücke der Integrale mit Hilfe anderer zwischen den gleichen Grenzen genommener Integrale. (Russisch.) Communications à la société Mathém. de Charkow. 1882, II.

65. 1883. Über eine Reihe, welche die Grenzwerte der Integrale in dem Fall der Zerlegung in Faktoren der integrierten Funktion giebt. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XLVII. (Anhang 4.)

66. 1884. Sur les fractions algébriques qui représentent approximativement la racine carrée d'une variable comprise entre les limites données. Bulletin de la Soc. Math. de France, t. XII.

67. 1885. Sur la transformation du mouvement rotatoire en mouvement sur certaines lignes à l'aide des systèmes articulés. Ebenda.

68. 1885. Über die Darstellung der Grenzwerte der Integrale durch Integralresiduen. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LI. (Anhang 4.) Acta mathem., Bd. IX, 1886. (Übersetzt durch Sophie Kowalewski.)

69. 1886. Sur les sommes composées des coëfficients des séries à termes positifs. (Brief an Sophie Kowalewski.) Acta mathem., Bd. IX.

70. 1886. Über die Integralresiduen, welche Näherungswerte der Integrale liefern. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LV. (Anhang 2.) Acta mathem., Bd. XII, 1889. (Französische Übersetzung von J. Lyon.)

71. 1887. Über zwei Sätze bezüglich der Wahrscheinlichkeiten. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LV. (Anhang 6.) Acta mathem., Bd. XIV, 1891. (Französische Übersetzung von J. Lyon.)

72. 1888. Über den einfachsten Gelenkmechanismus zur Erzeugung einer symmetrischen Bewegung um eine Axe. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LX. (Anhang 1.)

73. 1889. Über die Näherungsausdrücke einer Quadratwurzel d. Veränderlichen mit Hilfe der einfachen Brüche. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersb., t. LXI. (Anh. 1.) Acta mathem., Bd. XVIII, 1891. (Deutsche Übersetzung von O. Bäcklund.)

74. 1890. Über Summen, welche aus den Werten von einfachsten Monomen, die mit einer positiv bleibenden Funktion multipliziert sind, gebildet werden. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LXIV. (Anhang 7.)

75. 1892. Über die Entwickelung der nach positiven Potenzen einer Variablen geordneten Reihen in Kettenbrüche. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LXXI. (Anhang 3.)

76. 1892. Über die Polynome, welche am besten die Werte der einfachsten gebrochenen Funktionen für die zwischen zwei gegebenen Werten liegenden Werte der Variabeln darstellen. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersb., t. LXXII. (Anh. 7.)

77. 1894. Über die Summen, welche von den positiven Werten einer beliebigen Funktion abhängen. (Russisch.) Mém. de l'Acad. de St. Pétersb., série VIII, t. I, 1895.

78.* 1852. Note über die von Tschebyschef im Jahre 1852 unternommene Reise ins Ausland. (Russisch.) Actes de l'Université Impériale de St. Pétersbourg pour l'année 1852. St. Pétersbourg, 1853.

79. Caractère des coëfficients d'une série de la forme: $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$ qui résulte d'une fonction composée de fonctions algébriques, logarithmiques et exponentielles en nombre fini. Application à la série $\sum \frac{x^n}{n^2+1}$. Cours de M. Hermite 4ème éd., 1891, p. 197. Siehe auch: A. Markof, Sur les facteurs premiers des nombres de la forme $1+4x^2$. Bulletin de l'Acad. Impériale de St. Pétersbourg, t. III, 55—59.

80. Théorème sur les minimums successifs de $x - ay - \alpha$ pour les valeurs entières de x et y. Cours de M. Hermite. 4. éd. 1891, p. 199. Vergl. Hermite: Sur une extension donnée à la théorie des fractions continues par M. Tchébychef. (Auszug aus einem Brief an Borchardt.) Journal von Crelle, Bd. 88, 1880; angeführt nach dem Cours von Hermite.

81. 1893. Arithmomètre de Tchébychef. Annales du Conservatoire des Arts et Métiers, t. V, 2. série, Paris 1893. (Die Beschreibung des Arithmometers rührt von M. d'Ocagne her.)

82. 1894. Von Bohl, Arithmomètre de Tchébychef. Arbeiten der physikalischen Sektion der Vereinigung der Freunde der Naturwissenschaften von Moskau, Bd. VII, S. 12—22. (Der Aufsatz des Herrn von Bohl enthält die schönen Photographien der Rechenmaschine, die dem Verfasser durch Tschebyschef geschickt wurden, mit ergänzenden Angaben, die im Aufsatz wiedergegeben sind.)

---

* In Nr. 78—84 stellen wir einige wertvolle Angaben bezüglich der Arbeiten Tschebyschefs, die in den Werken anderer Autoren zitiert werden, zusammen.

83. Règle pour la rectification approchée des arcs. Notiz nach dem Gedächtnis von Herrn D. Gravé über seine letzte mathematische Unterhaltung mit Tschebyschef. Bulletin de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. II, 1895.

84. Récréations mathématiques par E. Lucas, t. IV, Paris 1894, p. 197—204.

85*. 1876. Nouveau genre de problèmes du calcul des variations. — Assoc. franç. etc. Session de 1876.

86. 1876. Règle pour tracer les arcs circulaires de grand diamètre. Ebenda. Vergl. Helmert, Mitteilung über einige Hilfsmittel zum Zeichnen sehr flacher Kreisbögen. (Zeitschrift für Vermessungswesen, Bd. VI, 1877.) Von Bohl, Die Instrumente und Apparate für das geometrische Zeichnen. (Russisch.) Moskau, 1893.

87. 1876. Neuer Mechanismus mit Parallelbewegung. Ebenda.

88. 1878. Intégration des équations differentielles de premier ordre. — Assoc. franç. etc. Session 1878.

89. 1876. Sur la détermination des orbites des planètes d'après des observations en grand nombre. Comptes rendus du 5ème Congrès des naturalistes russes à Varsovie.

90. 1876. Sur le facteur d'intégrabilité des équations différentielles du premier ordre. Ebenda.

91. 1876. Sur l'articulation qui donne au plan le mouvement horizontal. Ebenda.

92. 1879. Sur les parallelogrammes les plus simples. — Comptes rendus du 6ème Congrès des naturalistes russes à St. Pétersbourg.

93. 1860. Intégration de l'équation aux différences finies $u_n u_{n-2} = (u_{n-1} - 1)^2$. (Bemerkung in der Abhandlung von J. Mention: Sur le problème de Fuss. Bulletin de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. I, p. 512.)

94. Die Formeln von Tschebyschef für die Quadratur haben durch Arbeiten von A. Krilof, Professor der Marineakademie in St. Petersburg, wichtige Anwendungen in dem Schiffsbau erhalten und die darauf begründete Methode für die Berechnung der Elemente des Schiffsrumpfes ist in dem Lehrgang des Royal Naval College eingeführt. S. Krilof, Nouvelle méthode du calcul de éléments d'une carène (Bul. de l'Associat. techn. maritime, 1893) und andere Arbeiten in „Transactions of the Institution of Naval Architects." 1896 und 1898. Auch Munday. On the advantages of using Tschebyschefs rule etc. (Ebenda.)

---

* Nr. 85—92 beziehen sich auf einige Mitteilungen Tschebyschefs, von denen nur der Titel erhalten ist (manchmal mit sehr kurzen Andeutungen).

DIE TSCHEBYSCHEFSCHEN ARBEITEN IN DER THEORIE DER GELENKMECHANISMEN

VON

N. DELAUNAY.

Dem Andenken Sylvesters gewidmet.

Es dauert oft lange, bis die fruchtbarsten Ideen selbst grosser Männer der Wissenschaft genügend verstanden und geschätzt werden.

Trotz des bekannten Rufes Tschebyschef's sind seine Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen noch sehr wenig von dem Ingenieuren gewürdigt. Es giebt sogar Mathematiker, welche diese Arbeiten Tschebyschefs zu den geringsten seiner Verdienste rechnen. Diesen Mathematikern ist die technische Bedeutung der Tschebyschefschen Mechanismen noch nicht klar geworden; sie sehen in denselben nur eine scharfsinnige Anwendung der mathematischen Theorien Tschebyschef's. Für Ingenieure ist das Studium der Memoiren dieses grossen Geometers, welche sich auf die Gelenkmechanismen beziehen, durch die äusserst komplizierte Analyse sehr erschwert, da sie nur bei eingehender Bekanntschaft mit der Tschebyschef'schen „Theorie der am mindestens von der Null abweichenden Funktionen" verstanden werden kann; um so mehr noch, als Tschebyschef selbst sich in seinen Memoiren fast gar nicht bei der technischen Bedeutung seiner Mechanismen aufhält. Endlich sind auch nicht alle Arbeiten Tschebyschef's in die Sprachen West-Europas übersetzt.

In der vorliegenden Abhandlung habe ich mir folgende Aufgabe gestellt: 1. auf möglichst elementarem Wege die technische Bedeutung der Gelenkmechanismen Tschebyschef's und seiner auf diesen Gegenstand bezüglichen Ideen darzulegen; und 2. die für Mathematiker interessanten Seiten dieser Art in den Arbeiten des russischen Geometers hervorzuheben.

Die Gelenkmechanismen Tschebyschef's lassen sich in zwei Klassen einteilen: 1. angenäherte Geradführungen und 2. Mechanismen zur Übertragung der Rotationen.

I.

Im Gebiete der angenäherten Geradführung hat Tschebyschef Resultate von hervorragend wichtiger Bedeutung in technischer Beziehung erzielt:*

Er hat einen Mechanismus erfunden, welcher nur aus drei Gliedern besteht und, ungeachtet dieser Einfachheit, nicht die Schwingungen einer Schwinge in angenäherte geradlinige Bewegung transformiert (was auch vermittelst an-

Fig. 1.

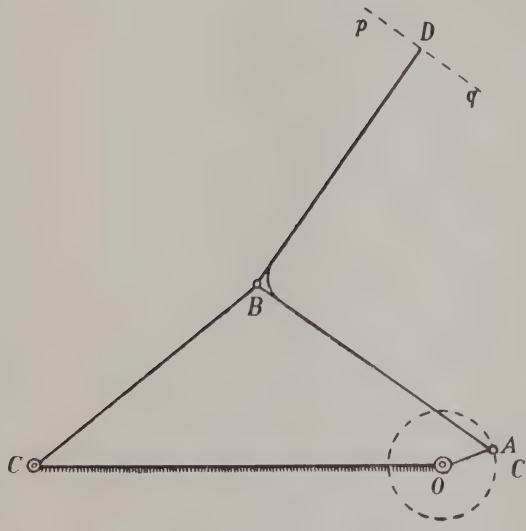
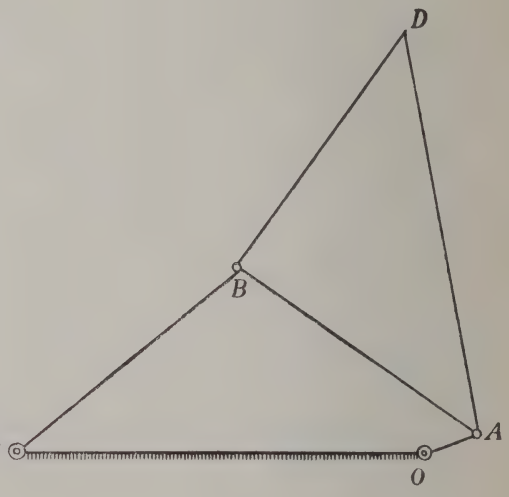


Fig. 2.



derer Three-bar-Mechanismen erreicht wird), sondern die stetige Rotation einer Kurbel.

Dieser merkwürdige Mechanismus, welcher gerade in technischer Beziehung alle andere Geradführungen übertrifft, besteht aus einer Kurbel OA (Fig. 1), einer Schwinge CB und einer Koppel ABD, welch' letztere ein Winkelglied vorstellt. Der Winkel ABD ist ein wenig kleiner als ein rechter (siehe weiter unten), $AB = BD = BC$.

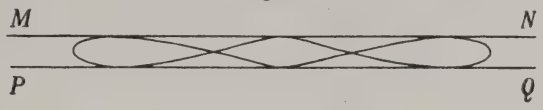
Fig. 2 zeigt noch deutlicher, dass der ganze Mechanismus nur aus drei Teilen besteht.

---

* „Über das einfachste Gelenksystem zur Erzielung einer symmetrischen Bewegung um die Axe." (Beilage zu Bd. LX der Memoiren der St. Petersburger kaiserl. Akademie der Wissenschaften, russisch.)

Die Gelenke C und O sind unbeweglich, so dass die Gerade CO den Steg des Mechanismus vorstellt. Bei der Drehung der Kurbel OA beschreibt der Punkt D eine Kurve, deren Gestalt in Fig. 3 dargestellt ist. Diese Kurve läuft zwischen zwei parallelen Tangenten MN und PQ. Der Abstand δ zwischen beiden Geraden ist sehr gering; wenn die relativen Maßverhältnisse des Mechanismus nach den unten angegebenen Formeln Tschebyschef's bestimmt worden sind, dann erscheint die gesamte Kurve fürs unbewaffnete Auge als eine Gerade

Fig. 3.



(siehe pq Fig. 1), so dass die ununterbrochene Rotation der Kurbel OA, praktisch genommen, durch diesen Mechanismus in eine geradlinige Schwingung des Punktes D transformiert wird.

Tschebyschef nimmt an:

$$OA = r,$$

$$Oc = d,$$

$$AB = BD = CB = 1$$

und giebt die Formeln:

$$r = \frac{2 \sin \psi \cdot \sin 2\psi \sqrt{2 \cos \psi}}{\sin 3\psi},$$

$$d = \frac{\sin 2\psi}{\sin 3\psi},$$

$$\delta = \frac{4 \cdot \sin 2\psi \cdot \sqrt{2 \cdot \cos^3 2\psi}}{\sin 3\psi},$$

wo δ (wie schon oben erwähnt) den Abstand zwischen den beiden einander parallelen Geraden MN und PQ vorstellt, zwischen denen die Koppelkurve läuft. Je kleiner δ ist, um so mehr nähert sich die Trajectorie des Punktes D einer Geraden, welche parallel den beiden Geraden MN und PQ und in gleichem Abstande von denselben verläuft. Die grösste Abweichung von einer Geraden ist $= \frac{\delta}{2}$. Die unabhängige Variable ψ ist gleich dem Winkel $\frac{ABD}{2}$. Die Länge der vom Punkte D beschriebenen Geraden pq und die verhältnismässig geringe Abweichung $\frac{\delta}{2}$ sind aus beifolgender Tabelle zu ersehen.

ψ	r	d	pq	δ
44^0	0,493	1,345	1,42	0,04959
$44^0\,50'$	0,190	1,402	0,52	0,00249
$44^0\,59'$	0,048	1,413	0,13	0,00004

So z. B. ist, bei $AB = BC = BD = 1$ m, $pq = 13$ cm, $\delta = \frac{1}{25}$ mm — eine Abweichung, welche in der Praxis unbeachtet gelassen werden kann.

Die Einfachheit dieses Mechanismus tritt erst recht zu Tage beim Vergleich mit irgend einer anderen Geradführung, z. B. mit dem „einfachen" Watt'schen Parallelogramm (Fig. 4). Um mit Hilfe des Watt-schen Mechanismus eine stetige Rotation in eine geradlinige Bewegung

Fig. 4.

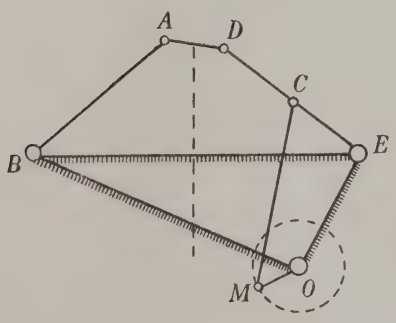
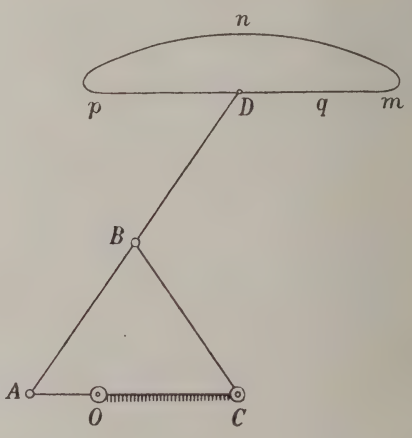


Fig. 5.



zu transformieren, müssen die drei Glieder des Mechanismus AB, DA, ED noch mit einer Koppel CM und einer Kurbel OM verbunden werden; wir erhalten somit ein fünfgliedriges System, während Tschebyschef dasselbe Resultat mit Hilfe eines dreigliederigen erzielt. Je weniger jedoch ein Mechanismus Glieder enthält, desto vollkommener und praktischer ist derselbe.

Diese Einfachheit des Tschebyschef'schen Mechanismus, welchen ich als den einfachsten Transformator bezeichne, ist von höchst wichtiger praktischer Bedeutung, wie das aus der Geschichte der Gelenkmechanismen hervorgeht.

Die Aufmerksamkeit der Gelehrten war durch Watt auf diese Mechanismen gelenkt worden; er hatte die Aufgabe der Geradführungen

vorgezeichnet. Aber gerade zu gleicher Zeit, als diese Aufgabe (theoretisch genommen) aufs glänzendste durch Peaucellier und Hart gelöst worden war, liessen die Ingenieure immer mehr und mehr von der Führung des Kreuzkopfes der Dampfmaschine mit Hilfe der Gelenkmechanismen ab und zogen es vor, zu diesem Zwecke Querhäupter mit Schienenführung zu gebrauchen. Es hat sich erwiesen, dass die theoretisch exakten Geradführungen, infolge der grossen Zahl der Glieder und Gelenke, viel weniger genau die geradlinige Bewegung des betreffenden Punktes einhalten, als die angenäherten Mechanismen; aber auch die letzteren stehen bezüglich ihrer Einfachheit hinter den Schienenführungen zurück.

Sollte es vielleicht dem Tschebyschef'schen „einfachsten Transformator", welcher die Konkurrenz mit der Schienenführung aushält, nicht zukommen, den bereits erloschenen Ruhm der geradführenden Gelenkmechanismen von neuem wieder herzustellen?

Ich erachte es nicht als notwendig, hier noch die vielen anderen von Tschebyschef erfundenen Geradführungen zu beschreiben; ich möchte aber nur auf eine derselben hinweisen, welche unter anderem Tschebyschef zur Errichtung der marschierenden Maschine gedient hat. Diese Geradführung* besteht aus den Gliedern OA, AD und BC (Fig. 5) mit festen Centren in O und C. Der Punkt D beschreibt die Kurve $mnpq$, deren ein Teil mqp sehr wenig von einer Geraden abweicht. Diese ganze Kurve ist derjenigen Kurve sehr ähnlich, welche die Fußspitzen eines im Schritt gehenden Menschen beschreiben, die relative Bewegung der Fußspitzen zum ganzen Körper genommen. Der über dem Boden schwebende Fuß beschreibt die Linie mnp, während die Linie pqm in dem Augenblick zurückgelegt wird (hinsichtlich des Körpers), wo der Fuß den Boden berührt. Dieser Eigenschaft hat sich Tschebyschef bei der Konstruktion seiner marschierenden Karre bedient.

Infolge der geringen Abweichung des Teiles mqp der Koppelkurve von einer Geraden, eignet sich dieser Mechanismus vorzüglich zur Geradführung. Tschebyschef giebt für dieselben folgende Formeln:

$$OC = \frac{2AB + AO}{3},$$

$$AB = BD = BC.$$

* Memoir. der St. Petersburger kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Bd. XIV, S. 45; siehe auch Burmester: Lehrbuch der Kinematik, S. 655.

Der gegenseitige Abstand δ der beiden parallelen Tangenten, zwischen denen sich der Teil mqp befindet, wird durch folgende Formel bestimmt:

$$\delta = \sqrt{\frac{4}{q}(r-a)(2r+a) + \frac{(4a-r)^3 r}{12(2r+a)^2}} - \sqrt{\frac{4}{q}(r-a)(2r+a)},$$

wo

$$a = 2OA$$

$$r = AD.$$

Die Länge des zurückgelegten Weges h lässt sich berechnen durch die Formel:

$$h = \sqrt{\frac{(5r-2a)(r+2a)(4a-r)\cdot r}{(2r+a)^2}}.$$

So z. B. beschreibt der Punkt D bei folgenden maßlichen Verhältnissen des Mechanismus in Centimetern:

$$AB = 64, \quad CO = 50, \quad OA = 22$$

eine Linie von 9 cm, welche von einer Geraden nur um $\frac{7}{100}$ mm abweicht.

Wenn OA nur ein wenig kleiner als CO ist, so bewegt sich der Punkt D bei gleichmässiger Drehung der Kurbel OA langsam bei der Zurücklegung des Teiles mpq und sehr schnell bei der Zurücklegung des übrigen Teiles der Trajectorie. Die Bewegung ist alsdann eine werfende. Diese Eigenschaft hat Tschebyschef zur Errichtung einer Windfege benutzt, in welcher ein bei D befestigtes Gefäss das Korn auf eine beträchtliche Entfernung fortschleudert.

II.

Vor Tschebyschef waren nur drei Gelenkmechanismen bekannt, welche die Rotation transmittierten: 1. das Parallelkurbelgetriebe, 2. das Antiparallelogramm und 3. der Galloway'sche Mechanismus. Von diesen wurde die Zahl der Umdrehungen nur beim letztgenannten verdoppelt.

Tschebyschef hat uns mehrere sehr interessante Transmissionen der Drehung durch Gelenkmechanismen geliefert.

1. Ein dreigliederiger Reversor. Dieser Mechanismus unterscheidet sich von einer Geradführung nur durch seine maßlichen Verhältnisse. Wenn man nämlich die Maßverhältnisse der Teile OA, OC

und AB des Mechanismus (Fig. 5) nach den für den einfachsten Transformator (Fig. 1) gegebenen Formeln bestimmt, so erhalten wir ein System, in welchem bei der Rotation der Kurbel OA der Punkt D eine Koppelkurve beschreibt (Fig. 6); wenn die Kurbel OA sich hierbei in der Richtung eines Uhrzeigers dreht, so beschreibt der Punkt D die erwähnte Kurve in entgegengesetzter Richtung (und umgekehrt). Die ganze Kurve (Fig. 6) kommt zwischen zwei zur selben tangentiale

Fig. 6.

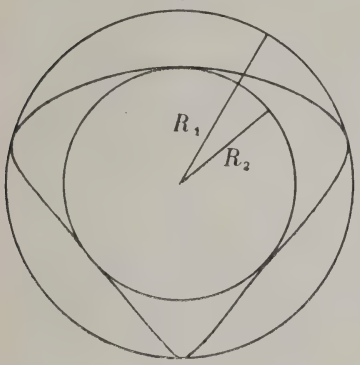
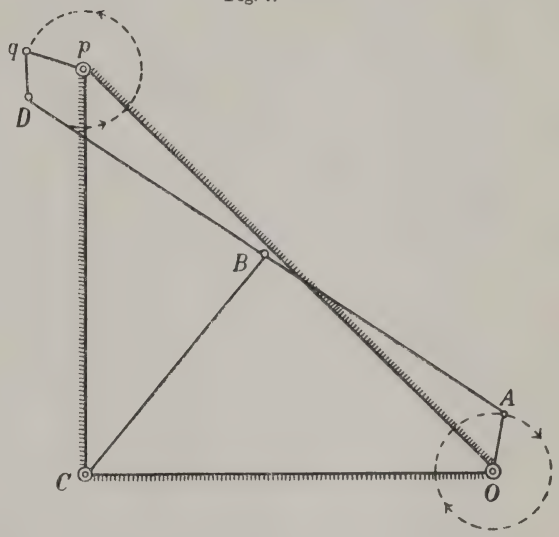


Fig. 7.



Kreislinien zu liegen, deren Radien gleich R_0 und R_1 sind, so dass die grösste Abweichung der Kurve von einer Kreislinie, deren Radius $\frac{R_0 + R_1}{2}$ ist, $\frac{R_1 - R_0}{2}$ beträgt.

Tschebyschef giebt für diesen Mechanismus* folgende Formeln:

$$OA = r,$$
$$AB = BD = BC = 1,$$
$$OC = d,$$

r und d werden mit Hilfe der Formeln des einfachsten Transformators berechnet und ausserdem:

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \frac{2\cos\psi \cdot \sin 2\psi \cdot \sqrt{2\cos 2\psi}}{\cos 3\psi},$$
$$\frac{R_1 - R_0}{2} = \frac{2\cos 2\psi}{\sin 3\psi}.$$

* Über das einfachste Gliedersystem ... Memoiren der St. Petersburger kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Beilage zu Bd. LX; russisch.

Als Beispiel sei hier folgende Tabelle beigelegt:

ψ	$\frac{R_0+R_1}{2}$	$\frac{R_1-R_0}{2}$	r	d
44°	0,519	0,094	0,493	1,345
44° 50′	0,191	0,016	0,190	1,402
44° 59	0,048	0,008	0,048	1,413

Wenn dieser Mechanismus durch Handbewegung in Gang gesetzt wird, so ist es nicht erforderlich, die möglichst geringe Abweichung der Trajektorie des Punktes D von einer Kreislinie anzustreben, und man kann daher den Griff direct in D befestigen; der Mechanismus wird alsdann die Bewegung der Hand, welche die Koppelkurve (Fig. 1) beschreibt, in die Rotation der Kurbel OA transformieren. Eben diese Transmission hat Tschebyschef in seinem „Samokat" (Automobil) angewendet. Bei der Arbeit dieses Mechanismus lässt sich eine interessante Erscheinung beobachten:

Da das Centrum der Trajectorie des Punktes D durch nichts angedeutet ist, so scheint es anfangs schwer, den Mechanismus in Bewegung zu setzen, weil man nicht weiss, in welcher Richtung die Hand zu führen ist. Es genügt jedoch, nur das erwähnte Centrum durch irgend ein Abzeichen hervorzuheben, und jede Schwierigkeit in der Handhabung des Mechanismus fällt fort. Diese Erscheinung und die Notwendigkeit eines Abzeichens hat Tschebyschef selbst bemerkt.

2. Fünfgliedriger Reversor. Zur Umwandlung seines dreigliedrigen Reversors in einen Mechanismus, welcher nicht die Drehung der Hand, sondern diejenige einer Kurbel in die Rotation einer anderen Kurbel transmittiert, hat Tschebyschef eine Methode erfunden, welche in vielen Fällen angewandt werden kann und ihrer weitgehenden Bedeutung wegen an und für sich einen wertvollen Beitrag für die Wissenschaft ausmacht. Die Sache ist nämlich die, dass der Punkt D des dreigliedrigen Reversors eine Kurve beschreibt, die sich schliesslich doch von einer Kreislinie unterscheidet, während das Ende q der Kurbel (Fig. 7) eine genaue Kreislinie beschreibt. Wie können dieselben vereinigt werden? Tschebyschef hat diese Aufgabe äusserst einfach gelöst: er verbindet den Punkt D mit dem Ende

der Kurbel q durch ein ergänzendes Glied. Der die Kurve beschreibende Punkt D zieht jetzt (oder stösst) den Punkt q nach sich, welcher eine Kreislinie beschreibt. Die Hinzufügung des ergänzenden Gliedes qD verwischt ausserdem alle Ungenauigkeiten der Konstruktion: sogar bei recht inexakter Ausführung arbeitet der Mechanismus dank dem ergänzenden Gliede vortrefflich.

3. Ein paradoxer Mechanismus. Tschebyschef hat seinen Mechanismus keine besondere Benennungen gegeben (die hier angeführten Benennungen gehören dem Autor dieser Notiz), aber der Mechanismus, welcher hier beschrieben werden soll, ist wirklich paradox; denn die Zahl der Umdrehungen der Kurbel, auf welche die Rotation übertragen wird, hängt davon ab, bei welcher Lage des ergänzenden Gliedes wir den toten Punkt passieren. Die Konstruktion dieses Mechanismus ist eben dieselbe, wie diejenige des fünfgliederigen Transformators; er unterscheidet sich von demselben nur dadurch, dass für denselben nach den oben angeführten Formeln nur diejenigen Maße berechnet werden, bei welchen die Abweichung $\frac{R_1 - R_0}{2}$ vom Trajektorium recht bedeutend ist. Dabei erscheint die Wirkung des ergänzenden Gliedes wirklich paradox: der Mechanismus erhält vier tote Punkte; je nach der Lage des ergänzenden Gliedes, bei welcher Dq den toten Punkt verlässt (so dass der Punkt D den Punkt q entweder nach sich zieht oder vor sich stösst) — wird der Mechanismus die Drehung der Kurbel OA auf die Kurbel q entweder in verdoppelter oder vervierfachter Zahl der Umdrehungen transmittieren. Zwecks Passierens der toten Punkte wird an der Kurbel pq ein Schwungrad befestigt. Der Mechanismus arbeitet jedoch stossweise.

Tschebyschef hat keine Beschreibung dieses Mechanismus hinterlassen und ich beschreibe denselben nur nach dem Gedächtnis nach einem Modell, das ich einmal gesehen habe.

Das Bestreben, Gelenkmechanismen mit Vergrösserung der Zahl der Umdrehungen zu erfinden, war bei Tschebyschef keineswegs zufälliger Art. Das schliesse ich daraus, dass Tschebyschef mir mit Entzücken von den bemerkenswerten Eigenschaften seines paradoxen Mechanismus erzählte, dass er sich für die in diese Richtung schlagenden Arbeiten interessierte und mir gegenüber einmal folgende bedeutungsvolle Worte äusserte: „Unsere grösste Lehrerin ist die Natur, aber sie bedient sich weder der Zahnräder noch der Scheiben, sondern ausschliesslich der

Gelenkmechanismen in der Einrichtung der Bewegungsapparate der Tiere. Freilich sind die Gelenkmechanismen heutzutage noch nicht im Stande mit den Zahnrädern und Scheiben in der Transmission der Rotationen zu konkurrieren; aber auch die ersten Zahnräder waren mal sehr unvollkommene Mechanismen und haben ihre regelrechte Konstruktion erst allmählich erreicht."

Es sei jedoch bemerkt, dass — wie schon oben erwähnt — vor Tschebyschef nur ein Gelenk-Gliedermechanismus bekannt war, welcher die Rotation mit Vermehrung (Verdoppelung) der Zahl der Umdrehungen transmittierte; es war der Gallowaysche Mechanismus. Bei Tschebyschef ist das Bestreben zur Konstruktion solcher Transmissionen jedoch sehr ausgeprägt.

Diese Frage ist in der That von grossem Interesse. Bisher war die Theorie der Gelenkmechanismen nur in einer Richtung entwickelt, welche die Erfindung von Geradführungen erstrebte. Jetzt jedoch, zu einer Zeit, wo die Frage nach Geradführungen als erschöpft gelten kann, tritt die Frage der Konstruktion von Gelenkgliedertransmissionen der Umdrehungen in den Vordergrund. Bemerkenswert ist das Vorhandensein eines gewissen Parallelismus in diesen beiden Fragen: es existieren exakte Geradführungen (Peaucellier, Hart, Bricard) und angenäherte (Watt, Evans, Tschebyschef); ebenso können auch die Gelenkgliedertransmissionen exakt (das Parallelkurbelgetriebe, der Pantograph) und angenähert (die Mechanismen Galoway's und Tschebyschef's) sein. Ohne Zweifel bildet die Trägheit der oscillierenden Glieder bei den Gelenktransmissionen einen sehr wesentlichen Mangel. Aber dieser Umstand bildet nicht in allen Fällen ein ernstes Hindernis, und auf jeden Fall haben wir es hier mit einer neuen höchst interessanten Frage zu thun. Wer weiss, zu welchen nützlichen Ergebnissen das Studium derselben noch führen kann.

III.

Indem wir die mathematische Seite der Tschebyschef'schen Arbeiten über die Gelenkgliedermechanismen betrachten, fällt uns vor allem auf, dass in allen diesen Arbeiten die Tschebyschef'sche Theorie der am mindesten von der Null abweichenden Funktionen zur Anwendung kommt, welche an und für sich von grossem mathematischen Interesse ist. Da diese Theorie schon fast klassisch geworden ist

(Bertand: Traité de calcul differentiel), so will ich mich nur mit einer möglichst kurzen Wiedergabe derselben begnügen. In seinem fundamentalen Memoire* stellt sich Tschebyschef die Lösung folgender Aufgabe: Es soll ein Polynom:

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} x + A_n$$

bestimmt werden, welcher — ohne aufzuhören, sich innerhalb der gegebenen Grenzen zu vergrössern oder zu verringern —, am mindesten von der Null abweicht. Überhaupt kann man die Aufgabe dieser Theorie in Folgendem zusammenziehen:

Gegeben ist eine $F(x)$, welche n Parameter $p_1, p_2 \ldots p_n$ hat; es sollen für diese Parameter solche Werte gefunden werden, bei denen die maximale Abweichung der $F(x)$ von der Null bei den zwischen $+h$ und $-h$ liegenden Werten von x am mindesten ist. Diese Theorie stellt ein sehr scharfes Mittel für die angenäherte Analyse vor und daher eignet sie sich ausgezeichnet zur Berechnung angenäherter Mechanismen.

Das mathematische Interesse der in Rede stehenden Tschebyschefschen Arbeiten beschränkt sich nicht nur auf diese Theorie allein: sie liefern auch recht viele interessante Objekte zu geometrischen Studien. Die Forschungen dieses Jahrhunderts haben gezeigt, dass bei den Kurven solche Abweichungen vorkommen, die nur mit Hilfe der Analyse entdeckt werden können und fürs Auge s. z. s. nicht wahrnehmbar sind: solcher Art sind z. B. die Undulationspunkte.

Die Forschungen Tschebyschefs liefern uns in der Trajektorie des Punktes D, des einfachsten Transformators, ein bemerkenswertes Beispiel einer Kurve sechster Ordnung, von welcher ein ganzer Zweig dem Auge als eine Gerade erscheint; — das scheint jedoch nur so, die Analyse entdeckt vielmehr die höchst komplizierte Form dieses Zweiges, dessen Abweichungen von einer Geraden jedoch äussert gering sind. Dieser Umstand stellt eine ganz neue Thatsache vor, welche (wie mir bekannt) vor Tschebyschef nicht erforscht worden ist. In den Watt'schen, Evans'schen und anderen Kurven weisen nur einige Zweigteile geringe Abweichung von der Geraden auf. In der Tscheby-

---

* Über die am mindesten von der Null abweichenden Funktionen. Beilage zu Bd. XXII der Memoire St. Petersburger kaiserl. Akademie der Wissenschaften, russisch.

schef'schen Kurve unterscheidet sich ein ganzer Zweig dem Augenscheine nach nicht im geringsten von einer Geraden.

Von grossem Interesse sind auch andere Kurven Tschebyschefs: 1. die Kurve, welche zwischen zwei gegenseitig parallelen Geraden läuft, wobei sie jede derselben dreimal berührt; 2. die zwischen zwei konzentrischen Kreislinien verlaufende Kurve.

Nicht weniger merkwürdig ist der Gesamtcharakter der Tschebyschef'schen Arbeiten. Tschebyschef, wenn er auf irgend welche mathematische Frage stiess, suchte auf alle Fälle irgend eine Lösung zu finden, wenn keine exakte, so doch irgend eine angenäherte. Dabei wusste er jedoch seinen angenäherten Lösungen eine solche allgemeine Form zu geben (siehe z. B. die oben angeführten Formeln), welche ganz deutlich das die gegenseitige Abhängigkeit der betreffenden Werte bestimmende Gesetz zu Tage treten lässt.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510C41YVG C001
P. L. TSCHEBYSCHEF UND SEINE WISSENSCHAF
3 0112 016924562